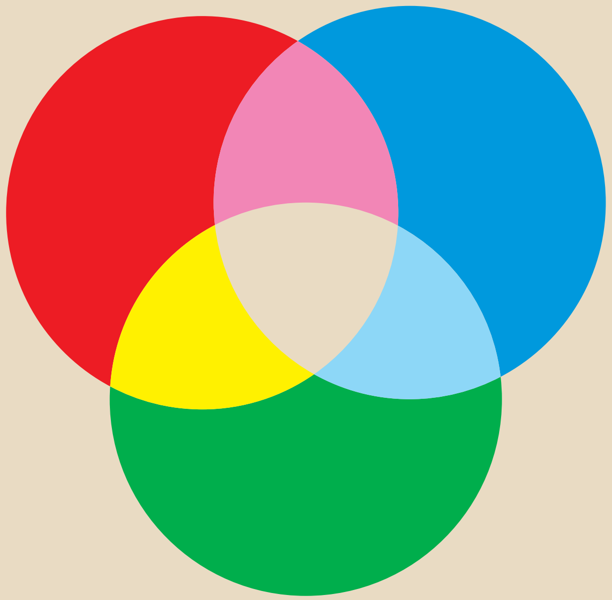
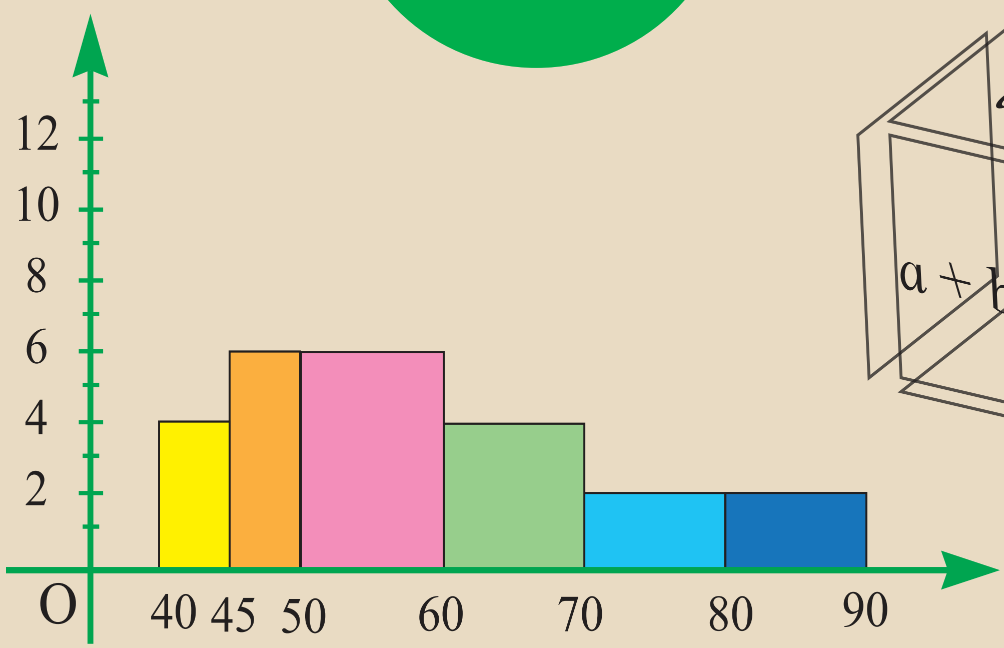
د پوهنې وزارت

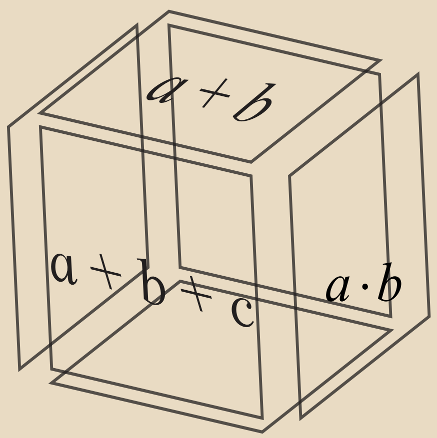
رياضي

نهم ټولگی

رياضي نهم ټولگی









۱۳۹۸ هـ. ش.



ملي سرود

دا وطن افغانســتـان دی
کور د سولې کور د تورې
دا وطن د ټولـو کور دی
د پښـتـون او هــزاره وو
ورسـره عرب، گوجر دي
براهوي دي، قزلباش دي
دا هېــواد به تل ځلېږي
په ســينـه کې د آسـيـا به
نوم د حق مــو دی رهبــر

دا عــزت د هـر افغان دی
هر بچی یې قهرمــان دی
د بــلوڅـــو د ازبکـــو
د تـرکمنــو د تـاجکـــو
پـاميـريـان، نـورسـتانيـان
هــم ايمـاق، هم پشه يان
لکه لمر پر شـنـه آسـمان
لکــه زړه وي جـاويـــدان
وايــو الله اکبر وايو الله اکبر

بسم الله الرحمن الرحيم

رياضي
نهم
ټولګی

۱۳۹۸

هـ.ش

د کتاب ځانګړتیاوې

مضمون: رياضي

مؤلفين: د تعليمي نصاب د رياضي ديپارتمنت د درسي کتابونو مؤلفين

اډيټ کوونکي: د پښتو ژبې د اډيټ ديپارتمنت غړي

ټولګی: نهم

د متن ژبه: پښتو

انکشاف ورکوونکی: د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تأليف لوی رياست

خپروونکی: د پوهنې وزارت د اړيکو او عامه پوهاوي رياست

د چاپ کال: ۱۳۹۸ هجري شمسي

د چاپ ځای: کابل

چاپخونه:

برېښناليک پته: curriculum@moe.gov.af

د پوهنې د وزیر پیغام

اقرأ باسم ربک

د لوی او ښښونکي خدای ﷻ شکر په ځای کوو، چې موږ ته یې ژوند رابښلی، او د لوست او لیک له نعمت څخه یې برخمن کړي یو، او د الله تعالی پر وروستي پیغمبر محمد مصطفی ﷺ چې الهي لومړنی پیغام ورته (لوستل) و، درود وایو.

څرنګه چې ټولو ته ښکاره ده ۱۳۹۷ هجري لمریز کال د پوهنې د کال په نامه ونومول شو، له دې امله به د ګران هېواد ښوونیز نظام، د ژورو بدلونونو شاهد وي. ښوونکی، زده‌کوونکی، کتاب، ښوونځی، اداره او د والدینو شوراګانې د هېواد د پوهنیز نظام شپږګوني بنسټیز عناصر بلل کیږي، چې د هېواد د ښوونې او روزنې په پراختیا او پرمختیا کې مهم رول لري. په داسې مهم وخت کې د افغانستان د پوهنې وزارت د مشرتابه مقام، د هېواد په ښوونیز نظام کې د ودې او پراختیا په لور بنسټیزو بدلونونو ته ژمن دی.

له همدې امله د ښوونیز نصاب اصلاح او پراختیا، د پوهنې وزارت له مهمو لومړیتوبونو څخه دي. همدارنګه په ښوونځیو، مدرسو او ټولو دولتي او خصوصي ښوونیزو تأسیساتو کې، د درسي کتابونو محتوا، کیفیت او توزیع ته پاملرنه د پوهنې وزارت د چارو په سر کې ځای لري. موږ په دې باور یو، چې د باکیفیته درسي کتابونو له شتون پرته، د ښوونې او روزنې اساسي اهدافو ته رسېدلی نشو.

پورتنیو موخو ته د رسېدو او د اغېزناک ښوونیز نظام د رامنځته کولو لپاره، د راتلونکي نسل د روزونکو په توګه، د هېواد له ټولو زړه سواندو ښوونکو، استادانو او مسلکي مدیرانو څخه په درناوي هیله کوم، چې د هېواد بچیانو ته دې د درسي کتابونو په تدریس، او د محتوا په لېږدولو کې، هیڅ ډول هڅه او هاند ونه سپموي، او د یوه فعال او په دیني، ملي او انتقادي تفکر سمبال نسل په روزنه کې، زیار او کوښښ وکړي. هره ورځ د ژمنې په نوي کولو او د مسؤولیت په درک سره، په دې نیت لوست پیل کړي، چې د نن ورځې ګران زده‌کوونکي به سبا د یوه پرمختللي افغانستان معماران، او د ټولنې متمدن او ګټور اوسېدونکي وي.

همدا راز له خوږو زده کوونکو څخه، چې د هېواد ارزښتناکه پانګه ده، غوښتنه لرم، څو له هر فرصت څخه ګټه پورته کړي، او د زده کړې په پروسه کې د ځیرکو او فعالو ګډونوالو په توګه، او ښوونکو ته په درناوي سره، له تدریس څخه ښه او اغېزناکه استفاده وکړي.

په پای کې د ښوونې او روزنې له ټولو پوهانو او د ښوونیز نصاب له مسلکي همکارانو څخه، چې د دې کتاب په لیکلو او چمتو کولو کې یې نه ستړې کېدونکې هلې ځلې کړې دي، مننه کوم، او د لوی خدای ﷻ له دربار څخه دوی ته په دې سپېڅلې او انسان جوړوونکې هڅې کې بریا غواړم.

د معیاري او پرمختللي ښوونیز نظام او د داسې ودان افغانستان په هیله چې وګړي یې خپلواک، پوه او سوکاله وي.

د پوهنې وزیر

دکتور محمد میرویس بلخي

فهرست

مــخ

فهرست

مــخ

لومڕی څپرکی

دایـــره





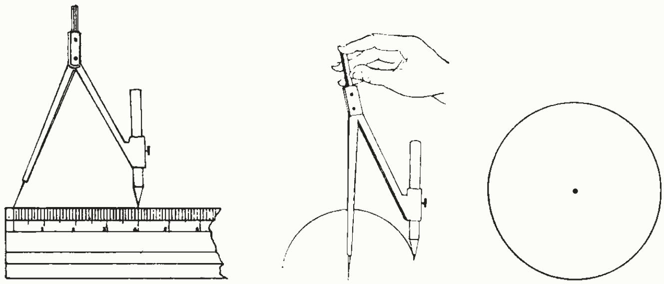
دایــره (CIRCLE)



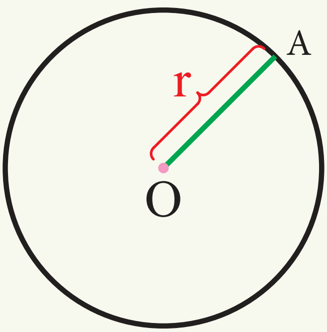
شکل ته پام وکړئ هغه هندسي شکلونه
چـې په تصویــر کــې وینــئ، نومونه یې
واخلئ.

فعالیت

یــو ټکــی دکاغــذ پر مخ وټاکئ، د 4cm پــه اوږدوالي د پرکار خولــه خلاصه او ددې ټکي شاوخواته، یو بشپړ دوران ورکړئ، لاسته راغلی شکل او ټاکل شوی ټکی څه نومېږي؟

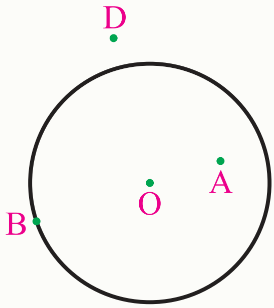


تعریف



په یوه مستوي کې د هغو ټولو ټکو سټ چې له یوه ټاکلي ټکي څخه مساوي واټن(فاصله) ولري، دایره نومېږي، یا په بل عبارت دایره له یوې تړلي منحني څخه عبارت ده چې له یوه ټاکلي ټکي څخه مساوي واټن ولري.
تړلې منحني ته د دایرې محیط او ټاکلي ټکي ته د دایرې مرکز وایي چې په $C(O,r)$ ښودل کېږي.
د دایرې مرکز په شکل کې O او شعاع یې د r په توورو ښودل کېږي.

فعالیت



- په لاندي شکل کې د A ، B او D ټکو ځایونه (موقعیت) نظر O دایرې ته وټاکئ.
- د هغو ټکو واټن د دایرې له مرکز څخه اندازه او د دایرې د شعاع له اوږدوالي سره پرتله کړئ.
- په خپله خوښه درې نور ټکي چې په دایره کې دننه او له دایرې څخه بهر پراته وي، په پام کې ونیسئ. آیا لاسته راغلي اړیکې د دې ټکو لپاره هم سمې دي؟

پایله:

1- د هغو ټکو سټ چې واټن یې د دایرې له مرکز څخه د دایرې له شعاع څخه کوچنی وي، د دایرې دننه ساحه(منځ) بلل کیږي، یا $I=\{A/|\overline{OA}|<r\}$

2- د هغو ټکو سټ چې واټن یې د دایرې له مرکز څخه د دایرې له شعاع سره مساوي وي، د دایرې محیط یا مخ ویل کیږي، یا $C=\{B/|\overline{OB}|=r\}$

3- د هغو ټکو سټ چې فاصله یې د دایرې له مرکز څخه د دایرې له شعاع څخه لوی وي، د دایرې باندنۍ ساحې په نامه یادیږي، یا $E=\{D/|\overline{OD}|>r\}$

4- د مستوي هغه برخه چې د دایرې د محیط او د هغې د د اخلي سطحې په واسطه جلا شوې وي، د دایرې د سطحې په نوم یادیږي.

پوښتنې

1- یوه دایره د $2cm$ په شعاع رسم کړئ. د لاندې ټکو څخه کوم یو یې د دایرې په دننه، بهر او په محیط کې پروت دی:

- د A ټکي واټن د دایرې له مرکز څخه $1.4cm$ دی.
- د B ټکي واټن د دایرې له مرکز څخه $2.3cm$ دی.
- د C ټکي واټن د دایرې له مرکز څخه صفر دی.
- د D ټکي واټن د دایرې له مرکز څخه $\frac{4}{2}cm$ دی.

2- په کوم حالت کې یو ټکی د دایرې پر محیط پروت وي.

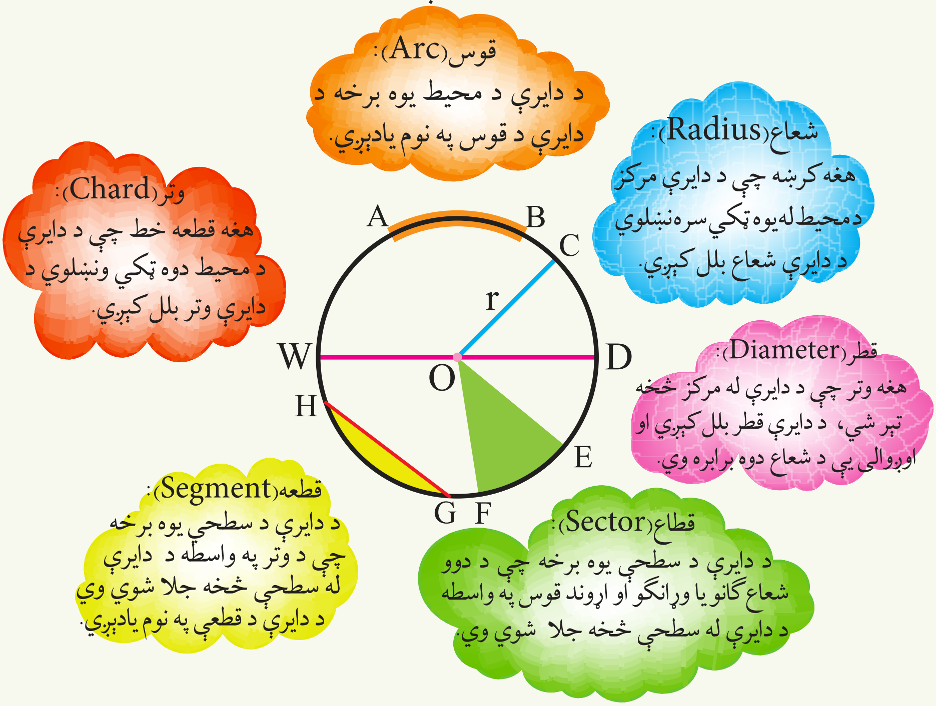
د دايرې عناصر
(Elements of a Circle)



شکل ته پام وکړئ د کېک مخ کوم هندسي شکل را ښيي او پرې شوې برخه يې د دايرې کوم عنصر راښيي؟

د دايرې د عناصرو تعريف

لومړې شکل او د دايرې د عناصرو تعريفونه خپلو کتابچوته نقل او وروسته لاندې تعريفونه د شکل له اړوندو عناصرو سره، په خپلو کتابچو کې ونښلوئ.



فعالیت

- د 4cm شعاع په اندازه یوه دایره رسم او له کاغذ څخه هغه پرې کړئ.
- د غه دایره داسې قات کړئ چې دواړه نیمې دایرې یو پر بل منطبقې شي.
- کاغذ خلاص کړئ، د کاغذ پر مخ قات شوې کرښه د څه په نامه یادېږي.
- دا ځل دوه نیمې دایرې بیا قات او قات کاغذ داسې خلاص کړئ چې څلور مساوي برخې لاسته راغلې وي. څو قطعه خطونه(ټوټه کرښې)وینئ. هر یو د څه په نامه یادېږي؟
- څلور لاسته راغلې زاویې اندازه کړئ او وواياست چې يو له بل سره څه اړيکې لري؟
- د يوې دايرې د قطر او شعاع تر منځ اړيکې څه دي؟
- دايره داسې قات کړئ چې دوه نامساوي برخې جوړې شي، هغه خلاصه کړئ، جوړه شوې کرښه د څه په نامه یادېږي؟ د هغې اوږدوالی د دایرې له قطر سره پرتله کړئ.

پایله:

- ومو لیدل چې په هره دایره کې که چېرې د دایرې د محیط دوه ټکي سره ونښلوو، د دایرې وتر لاسته راځي.
- په هره دایره کې ترټولو لوی وتر، د دایرې قطر دی چې د شعاع دوه برابره دی.
- د یوې دایرې هر قطر، وتر، خو هر وتر قطر نه دی.
- هغه قوس چې د یوې دایرې د محیط له نیمایي څخه کوچنی وي، د کوچني قوس (minor Arc) په نامه یادېږي.
- هغه قوس چې د یوې دایرې د محیط له نیمایي څخه لوی وي، د لوی قوس (major Arc) په نامه یادېږي.

پوښتنې

1- د $C(0,4)$ دایره رسم کړئ.

a) د دایرې شعاع یا وړانګه، قطر، قطعه او قطاع په شکل کې و ښیئ.

b) د دایرې د قطر اوږدوالی وټاکئ.

c) د دایرې محیط په څلورو مساوي برخو ووېشئ، له دې څخه، کومه پایله په لاس راځي؟

d) د دایرې داخلي ناحیه، خارجي ناحیه او د دایرې محیط د مختلفو رنګونو په واسطه په نښه کړئ.

له دایرې سره د یوې مستقیمې کرښې حالتونه

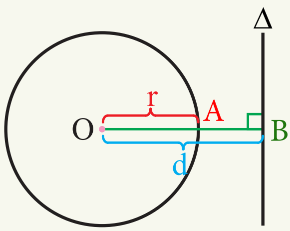


مخامخ شکل ته پام وکړئ او وواياست چې قلمونه او هندسي بکس، له دایرې سره څه اړیکې لري؟ هره یوه توضیح کړئ.

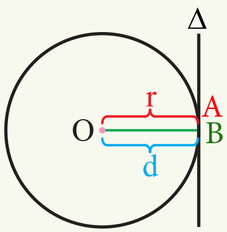
فعالیت

- یوه دایره او مستقیمونه داسې رسم کړئ چې له دایرې سره یوټکی، دوه ټکي او هېڅ ګډ(مشترک) ټکی و نه لري.
- د دایرې له مرکز څخه په هره مستقیمه کرښه باندې عمودي کرښې رسم کړئ، د دایرې د مرکز اوکرښې تر منځ واټن اندازه کړئ او هر حالت، د دایرې د شعاع له اوږوالي سره پرتله کړئ.

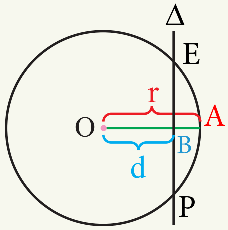
د پورتني فعالیت له کړنې څخه لیدل کېږي چې یوه مستقیمه کرښه او دایره نظر یو بل ته درې لاندې حالتونه لري:



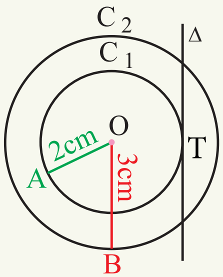
1- که چیرې مستقیمه Δ له دایرې سره ګډ ټکي و نه لري، مستقیمه Δ له دایرې څخه بهر پرته ده، په دې حالت کې د مستقیمې Δ واټن د دایرې له مرکز څخه د دایرې له شعاع څخه لوی دی یعني: $d > r$



2- که چیرې Δ مستقیمه له دایرې سره یو ګډ ټکی ولري، نو د مستقیمې Δ ته پر دایره مماس وايي. په دې حالت کې د Δ مستقیمې واټن د دایرې له مرکز څخه د دایرې له شعاع سره برابر ده یعني: $d = r$



3- که چیرې د Δ مستقیم له دایرې سره دوه ګډ ټکي ولري، مستقیم ته د دایرې قاطع وايي، په دې حالت کې د Δ مستقیم واټن د دایرې له مرکز څخه د دایرې له شعاع څخه کوچنی دی، یعنې $d < r$



(**بېلګه مثال**): د (O) ټکی په پام کې نیسو، د (O) په مرکز د 2 او 3 سانتي مترو په شعاع دوې متحدالمرکز دایرې رسم کړئ. د مستقیمې کرښې واټن د دایرې له مرکز څخه د C_1 او C_2، دوو دایرو له شعاع ګانو سره څه اړیکې لري؟

حل: په شکل کې لیدل کېږي چې د Δ مستقیم واټن د C_1 دایرې له مرکز څخه د هغې دایرې د وړانګې یا شعاع سره برابر دی یعنې: $d = r$

د Δ مستقیم واټن د C_2 دایرې له مرکز څخه د هغې دایرې له وړانګې یا شعاع څخه کوچنی دی یعنې: $d < r$

پوښتنې

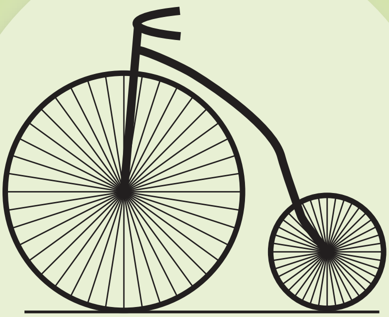
د $3cm$ شعاع په اوږدوالي سره یوه دایره رسم کړئ، په دې دایره کې کرښې، په لاندېنیو راکړل شویو واټنو کې رسم او حالتونه یې څرګند کړئ:

الف: د کرښې واټن د دایرې له مرکز څخه $2.5cm$ وي.

ب: د کرښې واټن د دایرې له مرکز څخه $4cm$ وي.

ج: د کرښې واټن د دایرې له مرکز څخه د دایرې له شعاع سره برابره وي.

د دایرو موقعیت نسبت یو بل ته



مخامخ شکل ته په پام سره ووایئ چې:

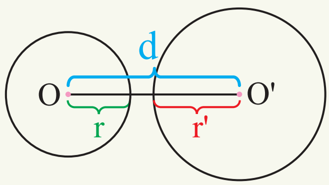
1- د بایسیکل ټایرونه کوم هندسي شکل لري؟

2- ټایرونه یو له بل سره څو حالتونه غوره کولای شي؟

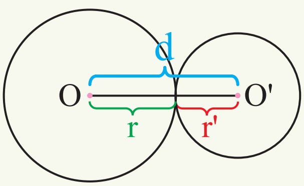
فعالیت

- دوې دایرې داسې رسم کړئ چې:
  1: یو له بل سره یو ګډ ټکی ولري.
  2: دوه ګډ ټکي ولري.
  3: له یو بل سره ګډ ټکی و نه لري.
- د دایرو د مرکزونو تر منځ اوږدوالی په پورته حالتونو کې د هغو له شعاع سره پرتله کړئ.

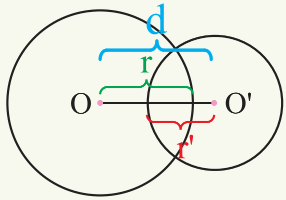
له پورتني فعالیت څخه لاندې پایلې په لاس راځي چې:

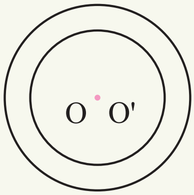


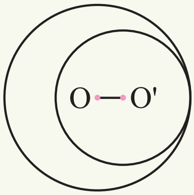
که چیرې د دوو دایرو د مرکزونو ترمنځ واټن، د هغو د شعاع له مجموعې اوږدوالي څخه زیات وي، په دې حالت کې دایرو ته ناپرېکړې یا نا متقاطع دایرې وایې، یعنې $d > r + r'$



که چیرې د دوو دایرو د مرکزونو تر منځ واټن د هغو د شعاع له مجموعې سره مساوي وي. په دې حالت کې، دایرو ته خارجاً مماس وایې، یعنې $d = r + r'$







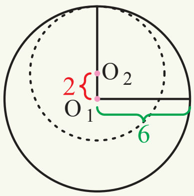
کــه د دوو دایــرو د مرکزونــو تــر منــځ واټــن، د هغــو د شــعاع ګانو د مجموعــې لــه اوږدوالــي څخه کوچنــی او د شــعاع ګانــو د تفریق حاصل له مطلقه قیمت څخه لوی وي، دایــرې یو له بل ســره متقاطع دي، یعنې $|r-r'| < d < r+r'$

که د دوو دایرو د مرکزونو تر منـځ واټــن صفر وي، دایــرې د متحدالمرکــز پــه نامــه ســره یادیــږي، یعنې $d=0$

کــه د دوو دایــرو د مرکزونــو ترمنــځ واټن د هغو د شــعاع ګانو د تفریق حاصل له مطلقه قیمت سره مساوي وي، دایرو ته له دننه مماس وایي، یعنې
$d=|r-r'|$

مثال(بېلګه): دوې دایرې داسې رسم کړئ چې د لومړۍ دایرې شعاع $6cm$ ، د دویمې دایرې او لومړۍ دایرې مرکزونو تر منځ واټن $2cm$ او د دویمې دایرې شــعاع د لومړۍ دایرې د شــعاع $\frac{2}{3}$ برابره وي، په دې حالت کې، د دې دوو دایرو موقعیت نظر یو بل ته پیدا کړئ؟

حل: که د لومړنۍ دایرې شعاع r_1 او د دویمې دایرې شعاع r_2 ونوموو، نو لرو:



$$\left.\begin{array}{l} r_1 = 6cm \\ r_2 = \frac{2}{3} r_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} r_2 = \frac{2}{3} \times 6 \\ r_2 = 4cm \end{array}$$

$$d = |r_1 - r_2| = |6-4| = |2| = 2$$

څرنګه چې:
نو له دایرې سره داخلاً مماس دي.

پوښتنې

1- دوې دایرې د $6cm$ او $4cm$ په شعاع په پام کې و نیسئ او په لاندې توګه یې رسم کړئ.

الف: دایرې خارجاً (له باندې) سره مماس دي.　　ب: دایرې داخلاً (له دننه) سره مماس وي.

ج: له دایرې سره متقاطع وي.　　د: دایرې سره غیر متقاطع (ناپرېکرې) وي.

هـ: دایرې متحدالمرکزه (ګډ مرکز) وي.

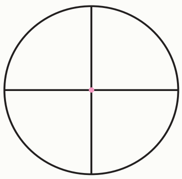
د دایرې اړوند زاویې (Circle of a Angles)



د دایرې مرکزي زاویې

تصویر ته پام وکړئ، هغه هندسي شکلونه چې په هغه کې لیدل کېږي، نوم یې واخلئ؟

فعالیت



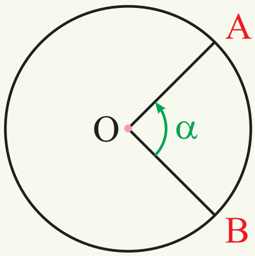
- په پورتني شکل کې، څو زاویې لیدلای شئ.
- د دې زاویو ګډ خاصیتونه کوم دي؟
- د $C(0,3)$ دایره رسم کړئ.
- په دې دایره کې یو پر بل دوه عمود قطرونه رسم کړئ.
- څو مرکزي زاویې لاسته راځي؟ د هرې زاویې د مقابل قوس اندازه څو درجې ده؟
- د دې دایرې محیط څو درجې دی؟

د پورتني فعالیت له نتیجې څخه لیکلای شو چې:

د یوه قوس اوږدوالی د هغه د مرکزي زاویې په پراخوالي پورې اړه لري، یعنې:

$$\frac{A\hat{O}B}{360^\circ} = \frac{\text{د قوس اوږدوالی}}{\text{د دایرې محیط}}$$

تعریف



هغه زاویه چې راس یې د دایرې په مرکز پروت او ضلعې یې د دایرې شعاع ګانې وي، مرکزي زاویه بلل کېږي، لکه: د $A\hat{O}B$ یا د $\hat{\alpha}$ زاویه:

هره مرکزي زاويه له دايرې څخه يو قوس بېلوي چې دغه قوس د خپلې مخامخ مرکزي زاويې سره مساوي اندازه لري، لکه: د $\overset{\frown}{AB}$ قوس چې له α زاويې سره مساوي دی.

د قرارداد له مخې ويلای شو چې په يوه دايره کې د مخامخ قوس اندازه د درجې له مخې له مرکزي زاويې سره مساوي ده، يعني: $A\hat{O}B = \overset{\frown}{AB} = \hat{\alpha}$

لومړی مثال: که د $C(O\,,r)$ په دايره کې لوی قوس د کوچني قوس پنځه برابره وي، نو د کوچني قوس، لوی قوس او د هغې د مرکزي زاويو اندازه پيدا کړئ.

حل: که کوچنی قوس $\overset{\frown}{PQ} = x$ وي، نو لوی قــوس يې $\overset{\frown}{PAQ} = 360^{\circ} - x$ دی نو ليکلای شو، چې:

$\overset{\frown}{PQ} + \overset{\frown}{PAQ} = 360^{\circ}$

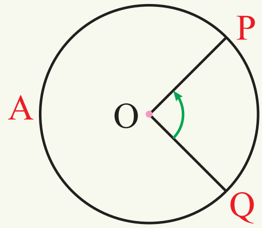
$\overset{\frown}{PAQ} = 5\overset{\frown}{PQ}$

$x + 5x = 360^{\circ}$

$6x = 360^{\circ}$

$x = 60^{\circ} \quad \Rightarrow P\hat{O}Q = x = 60^{\circ}$

$\overset{\frown}{PAQ} = 5x = 5 \times 60 = 300^{\circ}$



دويم مثال: په لاندې شکل کې که $K\hat{O}S = 31^{\circ}$ ، $E\hat{O}J = 82^{\circ}$ ، $\overline{EK}$ د دايرې قطر وي. د $\overset{\frown}{SJ}, \overset{\frown}{KJ}, \overset{\frown}{SK}$ د $\overset{\frown}{ES}$ قوسونه په درجه پيدا کړئ.

د مرکزي زاويې مخامخ قوس .....

$\overset{\frown}{SK} = S\hat{O}K = 31^{\circ} \quad \Rightarrow \overset{\frown}{SK} = 31^{\circ}$

$K\hat{O}J = 180^{\circ} - E\hat{O}J = 180^{\circ} - 82^{\circ} = 98^{\circ}$

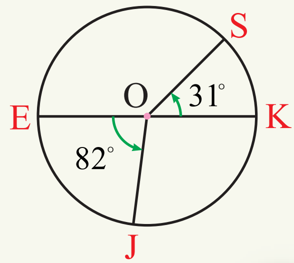
$K\hat{O}J = \overset{\frown}{KJ} = 98^{\circ}$

$\overset{\frown}{SJ} = \overset{\frown}{SK} + \overset{\frown}{KJ} = 31^{\circ} + 98^{\circ} = 129^{\circ}$

$\overset{\frown}{JE} = E\hat{O}J = 82^{\circ}$

$\overset{\Delta}{EOS} = 180^{\circ} - \overset{\Delta}{SOK} = 180^{\circ} - 31^{\circ} = 149^{\circ}$

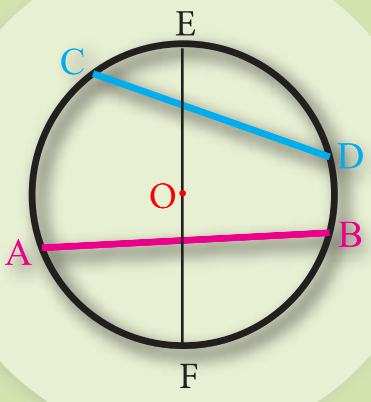
$\overset{\Delta}{EOS} = \overset{\frown}{ES} = 149^{\circ}$



پوښتنې

1- د A ، B او C درې ټکي د $C(O\,,r)$ پر دايره داسې پراته دي چې $A\hat{O}B = 75^{\circ}$ ، $B\hat{O}C = 136^{\circ}$ زاويې د OB دواړو خواوو ته پرتې وي، $\overset{\frown}{AC}$ حساب کړئ.

2 - يوه مرکزي زاويه، د 180° په اندازه رسم کړئ.



د دايرې د وتر خواص

شکل ته پام وکړئ د $\overline{AB}$ ، $\overline{CD}$ او $\overline{EF}$ مستقيمي کرښې په څه نامه يادېږي؟ د $\overline{EF}$ کرښې ځانګړتيا څه ده؟ او له $\overline{AB}$ او $\overline{CD}$ کرښې سره څه اړيکې لري؟

فعاليت

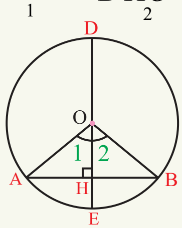
- د $C(O,r)$ په دايره کې د $\overline{AB}$ وتر رسم کړئ.
- د دايرې د $\overline{ED}$ قطر داسې رسم کړئ چې د $\overline{AB}$ په وتر د H په نقطه عمود وي.
- د (O) ټکی د A او B سره ونښلوئ، لاسته راغلی مثلث څه ډول مثلث دی؟
- په لاندې تشو ځايونو کې د($=,<$ يا $>$) ورنښې وليکئ.

$\overline{OA}$ ☐ $\overline{OB}$, $\overset{\frown}{AE}$ ☐ $\overset{\frown}{EB}$, $\overline{AH}$ ☐ $\overline{HB}$

د دې فعاليت له پايلې څخه کولای شو، لاندې قضيه بيان او ثبوت کړو.

قضيه: په هره دايره کې په وتر عمود قطر، وتر او د هغې مقابل قوس نيمو ي.

ثبوت: د $\overset{\Delta}{B\,H_2O}$ او $\overset{\Delta}{A\,H_1O}$ دوو مثلثونو څخه ليکلای شو چې:



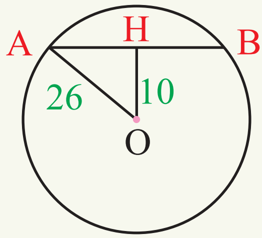
$$\left.\begin{array}{l} \overline{OA}=\overline{OB}\text{.........د دايرې شعاع} \\ \hat{H}_1=\hat{H}_2\text{.......... قايمه} \\ \overline{OH}=\overline{OH}\text{........ مشترک} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{AHO}\cong\overset{\Delta}{OHB}$$

نو د دوو مثلثونو له تساوي څخه داسې پايله لاسته راځي، چې: $\overline{AH}=\overline{HB}$ او د $\overset{\Delta}{AOH}$ او $\overset{\Delta}{BOH}$ مرکزي زاويې سره مساوي دي، په پايله کې $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{EB}$ دی.

مثال: د $C(O,26)$ دايره راکړل شوې ده، که چيرې پر وتر د عمود اوږدوالی، د دايرې له مرکز څخه (2) واحده وي، د $\overline{AB}$ وتر اوږدوالی حساب کړئ.

حل: د $\overset{\Delta}{OAH}$ په مثلث کې د فیثاغورث د قضیې له مخې لرو چې:

$$\overline{OA}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{OH}^2$$
$$(26)^2 = \overline{AH}^2 + (10)^2$$
$$\overline{AH}^2 = (26)^2 - (10)^2$$
$$\overline{AH}^2 = 676 - 100 = 576$$
$$\overline{AH} = 24$$
$$\overline{AB} = 2\overline{AH} = 2 \times 24 = 48\,\text{unit}$$



فعالیت

- د $C(0,3)$ دایره رسم کړئ.
- په دایره کې د $\overline{PQ}$ او $\overline{ER}$ دوه مساوي وترونه رسم کړئ.
- د دایرې له مرکز څخه د $\overline{PQ}$ او $\overline{ER}$ په وترونو عمود کرښې رسم او اوږدوالی یې معلوم کړئ.

د دې فعالیت له پایلې څخه لاندې قضیه بیان او ثبوتوو.

قضیه: په هره دایره کې د هغې مساوي وترونه، د دایرې له مرکز څخه مساوي واټن لري.

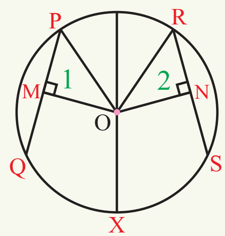
ثبوت: د $\overset{\Delta}{PMO}$ او $\overset{\Delta}{RNO}$ د دوو مثلثونو څخه لرو چې:

$\overline{OP} = \overline{OR}$ ....د دایرې شعاع

$\hat{1} = \hat{2}$ ....قایمه

$\overline{PQ} = \overline{RS}$ .... مساوي وترونه $\Rightarrow \overset{\Delta}{PMO} \cong \overset{\Delta}{RNO}$

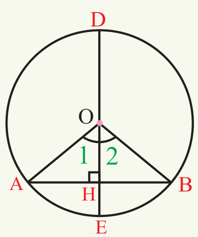
$\dfrac{\overline{PQ}}{2} = \dfrac{\overline{RS}}{2} \Rightarrow \overline{PM} = \overline{RN}$ $\qquad \overline{OM} = \overline{ON}$



په پایله کې ویلای شو چې په هره دایره کې مساوي وترونه له مرکز څخه مساوي واټن لري.

پوښتنې

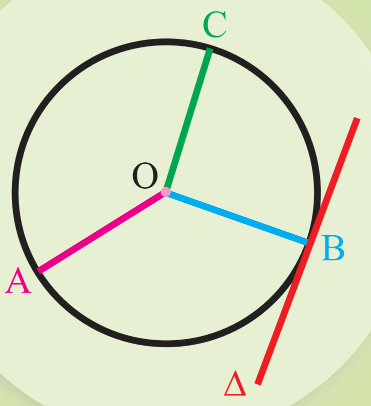
1- د $C(0,13)$ په دایره کې د $\overline{AB}$ وتر د دایرې له مرکز څخه 5 واحده واټن لري، د $\overline{AB}$ اوږدوالی پیدا کړئ.



2- که چیرې د یوې دایرې قطر د وتر له نیمایي څخه تېر شي، ثبوت کړئ چې پر وتر عمود دی.

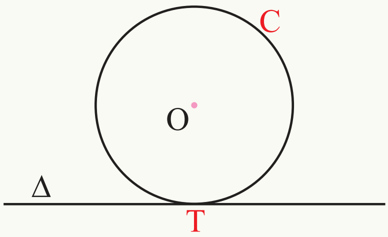
3- په یوې دایره کې $\overline{AB} = 8cm$ وتر رسم کړئ. که چیرې د وتر عمودي واټن له مرکز څخه $\overline{OH} = 3cm$ وي، د دایرې قطر او محیط محاسبه کړئ.

د دایرې د شعاع ځانګړتیاوې



شکل ته په پام سره، د OA، OB او $\overline{OC}$ کرښې څه نوميږي او د Δ کرښه، د دايرې او له $\overline{OB}$ وړانګې سره څه اړيکې لري؟

فعالیت



- په مخامخ شکل د (Δ) مستقيمه کرښه، د $C(0,2)$ دايرې د T په ټکي کې مماس ده. د A, B, C او D ټکي، د مماس پر مخ د T ټکي دواړو خواوو کې وټاکئ او د دايرې له مرکز سره يې ونښلوئ.
- قطعه خطونه، د خط کش په مرسته اندازه کړئ.
- د دايرې د مرکز او مماس تر منځ لنډ واټن ونباياست؟

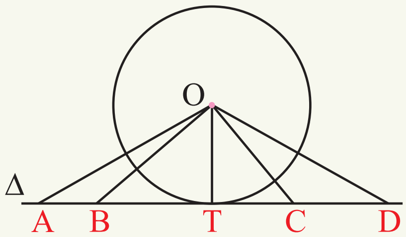
تر ټولو کوچنی واټن د يوه ټکي او يوې مستقيمې کرښې تر منځ، کوم واټن دی؟

- له پورتنيو دوو حالتونو څخه، څه پايله لاسته راوړئ؟

د دې فعاليت له پايلې څخه په لاندې توګه قضيه بيان او ثبوتوو.

قضيه: د دايرې شعاع، د تماس په ټکي کې، پر مماس عمود ده.

ثبوت: په لاندې شکل کې ليدل کيږي چې:



$$\overline{OT} < \overline{OB} < \overline{OA}$$
$$\overline{OT} < \overline{OC} < \overline{OD}$$

پوهيږو چې تر ټولو کوچنی واټن، د يوه ټکي او مستقيم ترمنځ عمودي واټن دی. په پايله کې ويلای شو چې مستقيمې کرښې: $\overline{OT} \perp \Delta$ دي.

لومړی مثال: په لاندې شکل کې، د Δ مستقیمه کرښه، د A په ټکي، د $C(O,r)$ پر دایره مماس ده. که چیرې د $\hat{AOB}$ مساوي 60° وي، د x زاویه پیدا کړئ.

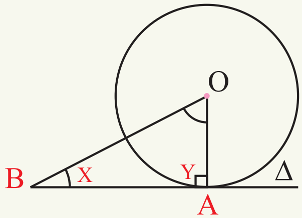
$OA \perp BA \Rightarrow \hat{y} = 90^\circ$

$\hat{o} + \hat{x} + \hat{y} = 180^\circ$

$60^\circ + \hat{x} + 90^\circ = 180^\circ$

$x = 180^\circ - 150^\circ$

$x = 30^\circ$



دویم مثال: په لاندې شکل کې، د Δ مستقیمه کرښه، د $C(O,r)$ پر دایره مماس ده، که $\overline{OM} = 4unit$ او $\overline{ON} = 5unit$ اوږدوالي ولري، د $\overline{MN}$ اوږدوالی پیدا کړئ.

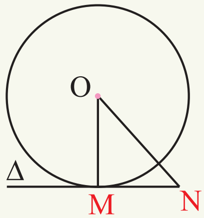
حل: پوهېږو، چې د دایرې شعاع، د تماس په ټکي، پر مماس عمود ده په پایله کې د $O\hat{M}N$ په قایم الزاویه مثلث کې، د فیثاغورث د قضیې پربنسټ لرو چې:

$\overline{ON}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{MN}^2$

$\overline{MN}^2 = \overline{ON}^2 - \overline{OM}^2$

$\overline{MN}^2 = 5^2 - 4^2 = 9$

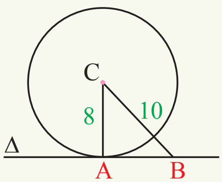
$\overline{MN} = 3$



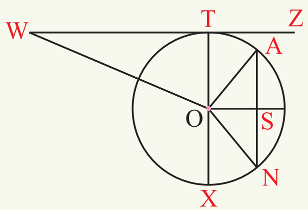
- د دایرې شعاع، د تماس په ټکي کې، پر مماس عمود وي.
- هر مماس، په هغه شعاع چې د تماس له ټکي څخه تیرېږي، عمود دی.

پوښتنې

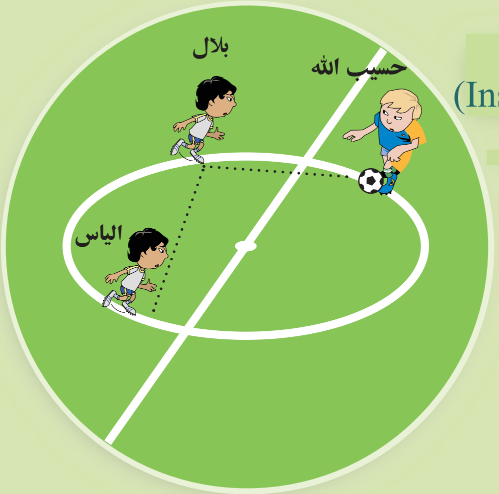
1- په مخامخ شکل کې د Δ کرښه د $P(C,r)$ پر دایرې مماس ده، که $\overline{AC} = 8unit$ او $\overline{BC} = 10unit$ اوږدوالی ولري، د AB اوږدوالی پیدا کړئ.



2 - په مخامخ شکل کې، که $\overline{WZ}$ د T په ټکي، د $C(O,r)$ پر دایرې مماس وي، $\overline{OS} = 1unit$ ، TW=3unit وي، د $\overline{OA}, \overline{AS}, \overline{SN}, \overline{OW}$ او TX اوږدوالی پیدا کړئ.



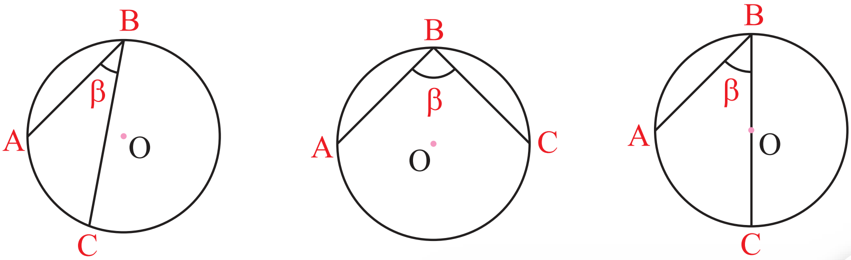
د دایرې محیطي زاویه
(Inscribed Angel of a Circle)



د فوټبال د میدان په مرکزي دایره کې حسیب الله، بلال ته او بلال الیاس ته توپ پاس کړ. هغه شکل چې د توپ د شوټ له مسیر څخه جوړېږي، څه ډول دی؟

تعریف

هغه زاویه چې رأس یې د دایرې پر محیط او ضلعې یې د دایرې دوه وترونه وي، محیطي زاویه بلل کېږي، لکه: د $\hat{ABC}$ یا د $\hat{\beta}$.



فعالیت

- د $C(O,r)$ په دایره کې د $\hat{ABC}$ محیطي زاویه چې د $\overline{BC}$ ضلع یې د دایرې له مرکز څخه تېره شي، رسم کړئ.
- د A ټکی د دایرې له مرکز (O) سره ونښلوئ، څرنګه مثلث لاسته راځي؟
- د $\hat{A}$ او $\hat{B}$ زاویې د $\hat{OAB}$ په مثلث کې یو له بل سره څه اړیکې لري؟
- د $\hat{AOC}$ زاویه له $\hat{A}$ او $\hat{B}$ له زاویو سره څه اړیکې لري؟

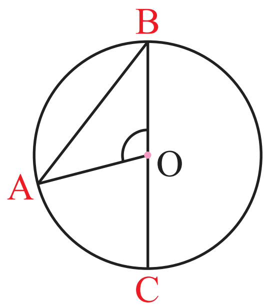
په یاد ولرئ چې:
- د مرکزي زاویې پراخوالی د خپل مخامخ قوس سره مساوي دی.
- په هر مثلث کې د خارجي زاویې پراخوالی له مجاورې زاویې پرته د دوو داخلي زاویو له مجموعي سره مساوي دی.

د مخکیني مخ د فعالیت له پایلې څخه په لاندې توګه، قضیه بیان او ثبوتوو.

قضیه: د هرې محیطي زاویې پراخوالی د خپل مخامخ قوس نیمایي دی.

دلته قضیه په هغه حالت کې ثبوتوو چې د محیطي زاویې یوه ضلع د دایرې قطر وي. د دوو نورو حالتونو ثبوت د کورني دندې په توګه، زده کوونکو ته پاتې شو.

ثبوت: د $\hat{AOC}$ زاویه د $\overset{\Delta}{AOB}$ د مثلث خارجي زاویه ده، لیکلای شو چې:



مرکزي زاویه ..... $\hat{AOC} = \overset{\frown}{AC}$

$\hat{AOC} = 2\hat{B}$

نو: $\overset{\frown}{AC} = 2\hat{B}$

په پایله کې $\hat{ABC} = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2}$

$$\left.\begin{aligned} \hat{AOC} &= \hat{A} + \hat{B} \\ \hat{A} &= \hat{B} \text{ ....ولې} \\ \hat{AOC} &= \hat{B} + \hat{B} \\ \hat{AOC} &= 2\hat{B} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

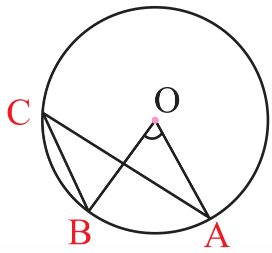
د $\hat{ABC}$ د محیطي زاویې پراخوالی له $\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$ سره برابر دی.

مثال: د $C(O,r)$ په دایره کې که مرکزي زاویه $\hat{AOB} = 60^\circ$ وي، د $\hat{ACB}$ محیطي زاویې مخامخ $\overset{\frown}{AB}$ قوس، یې پیدا کړئ.

حل: په یوه دایره کې د مرکزي زاویې او د هغې د مخامخ قوس له اړیکو څخه لیکلای شو چې:

$$\left.\begin{aligned} \hat{AOB} &= 60^\circ \\ \hat{AOB} &= \overset{\frown}{AB} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = 60^\circ$$

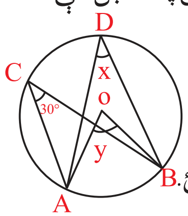
$$\left.\begin{aligned} \overset{\frown}{AB} &= 60^\circ \\ \hat{ACB} &= \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \hat{ACB} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$



پوښتنې

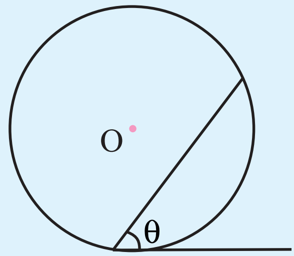
1 - په یوه دایره کې د 90° په اندازه، محیطي زاویه رسم کړئ.

2 - د دایرې پر محیط د A او B دوه ټکي په پام کې ونیسئ. د $\overset{\frown}{AB}$ د قوس په مقابل کې، څو محیطي زاویې رسمولای شو.



3 - په باندې شکل کې په پام کې ونیسئ، د مجهول زاویې قیمت پیدا کړئ.

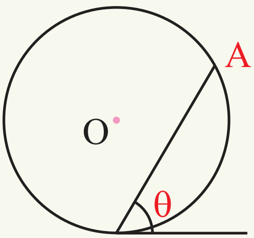
د دایرې مماسي زاویه



شکل ته پام وکړئ، هغو مستقیمو کرښو چې د θ زاویه یې جوړه کړې ده، نوم واخلئ او د زاویې رأس چېرته پروت دی؟

تعریف

هغه زاویه چې یوه ضلع یې پر دایره مماس او دویمه ضلع یې د دایرې وتر وي او رأس یې د تماس په ټکي کې پروت وي مماسي زاویه بلل کیږي، لکه: د θ زاویه.



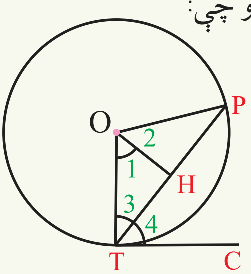
فعالیت

- د $C(0,6)$ دایره رسم کړئ.
- په دې دایره کې یوه مماسي زاویه $\hat{CTP}$ رسم کړئ.
- د دایرې د وتر انجامونه $\overline{PT}$ له مرکز سره ونښلوئ، څه ډول مثلث لاسته راځي؟
- د دایرې له مرکز څخه پر وتر عمود رسم کړئ.
- د $\hat{TOP}$ مرکزي زاویه او د $\hat{PTC}$ مماسي زاویې سره څه اړیکې لري؟

د دې فعالیت له پایلې څخه لاندې قضیه ثبوتولی شو.

قضیه: په یوه دایره کې د مماسي زاویې پراخوالی، د هغې د مخامخ قوس نیمایي په اندازه دی.

ثبوت: د $\overset{\Delta}{OHT}$ قایم الزاویه مثلث او $\hat{OTC}$ قایمې زاویې څخه لرو چې:

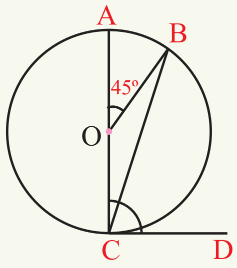


$$\left.\begin{array}{l}\hat{3}+\hat{1}=90^\circ\\ \hat{3}+\hat{4}=90^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{3}+\hat{1}=\hat{3}+\hat{4}\Rightarrow\hat{1}=\hat{4}$$

$$\hat{1}=\frac{\hat{POT}}{2}=\frac{\overset{\frown}{PT}}{2}\Rightarrow \hat{PTC}=\frac{\overset{\frown}{PT}}{2}$$

لومړی مثال: په لاندې شکل کې چې د $C(0,r)$ په دایره کې د هغې مرکزي زاویه 45° وي، د محیطي او مماسي زاویو پراخوالی پیدا کړئ.

حل: د مرکزي زاویې او د هغې د مخامخ قوس له اړیکو څخه په ګټه لیکلای شو چې:



$$\hat{AOB} = 45^\circ \quad \Rightarrow \quad \overset{\frown}{AB} = 45^\circ$$

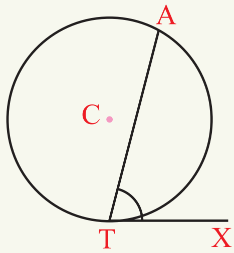
$$\hat{BOC} = 135^\circ \quad \Rightarrow \quad \overset{\frown}{BC} = 135^\circ$$

$$\hat{BCD} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} = \frac{135^\circ}{2} = 67.5^\circ$$

$$\hat{ACB} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} = \frac{45^\circ}{2} = 22.5^\circ$$

دویم مثال: په لاندې شکل کې د $\overset{\frown}{AT}$ قوس چې د $\hat{ATX}$ زاویې مخامخ ته واقع دی $(2\alpha - 6)^\circ$ دی، د $\hat{ATX}$ مماسي زاویې اندازه پیدا کړئ.

حل: د مماسي زاویې او دهغې د مخامخ قوس له اړیکو څخه دګټې اخیستلو له مخې لیکلای شو، چې:



$$\hat{ATX} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AT}$$

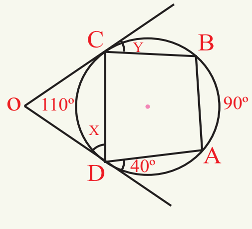
$$\hat{ATX} = \frac{1}{2}(2\alpha - 6)^\circ$$

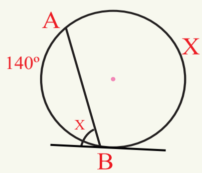
$$= (\alpha - 3)^\circ$$

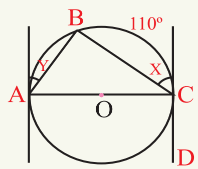
پایله: محیطي او مماسي زاویې چې د عین قوس په مقابل کې پرتې وي، سره مساوي دي. مماسي زاویه، د مخامخ قوس نیمایي ده.

پوښتنې

۱- د مماسي زاویو اندازه په لاندې شکلونو کې په لاس راوړئ.







د لومړي څپرکي لنډيز

- **دايره**: د هغو ټکو سټ يا هندسي محل چې له يوه ټاکلي ټکي څخه مساوي واټن ولري، دايره بلل کېږي.
- د هغو ټکو سټ چې واټن يې د دايرې له شعاع څخه کوچنی وي، د دايرې دننه ساحه بلل کېږي.
- د هغو ټکو سټ چې واټن يې د دايرې له مرکز څخه د دايرې له شعاع سره مساوي وي، د دايرې محيط يا مخ بلل کېږي.
- د هغو ټکو سټ چې واټن يې د دايرې له مرکز څخه نسبت د دايرې شعاع ته لوی وي، د دايرې باندنۍ ساحه بلل کېږي.
- د مستوي هغه برخه چې د منحني او د دايرې د داخلي سطحې په واسطه بېله شوې وي، د دايرې سطحه بلل کېږي.
- **د دايرې شعاع**: هغه کرښه چې د دايرې مرکز او د محيط يو ټکی سره نښلوي، د دايرې شعاع بلل کېږي.
- **د دايرې وتر**: هغه ټوټه کرښه چې د دايرې د محيط دوه ټکي سره نښلوي، ددايرې وتر بلل کېږي.
- **د دايرې قطر**: د دايرې هغه وتر چې له مرکز څخه تېرېږي د دايرې قطر بلل کېږي. هر قطر، د شعاع دوه برابره دی.
- **د دايرې قوس**: د دايرې د محيط يوه برخه چې د دوو ټکو په مرسته بېله شوې وي قوس بلل کېږي.
- **د دايرې مماس**: هغه کرښه چې له دايرې سره يو ګډ ټکی ولري، مماس بلل کېږي.
- د دايرې قطعه: د دايرې هغه برخه چې د دايرې د وتر او اړونده قوس تر منځ پرته وي، د دايرې قطعه بلل کېږي
- **د دايرې قطاع**: د دايرې يوه برخه ده چې د دوو شعاعګانو او اړوند قوس په مرسته، د دايرې له سطحې څخه بېله شوې وي.
- که يو مستقيم له يوې دايرې سره يو ګډ ټکی ولري، د مماس او که چيرې دوه ګډ ټکي ولري، د قاطع په نوم يادېږي.
- په هره دايره کې د دايرې له مرکز څخه پر وتر عمودي کرښه، وتر او مخامخ قوس نيمايې کوي.

- د دايرې شعاع د تماس په ټکي کې پر مماس عمود ده.
- د يوې دايرې مساوي وترونه، د هغې له مرکز څخه مساوي واټن لري.
- **مرکزي زاويه**: هغه زاويه چې رأس يې د دايرې په مرکز پروت او ضلعې يې د دايرې شعاع ګانې وي، مرکزي زاويه بلل کېږي.

- د هرې مرکزي زاويې اندازه، د هغې له مخامخ قوس سره مساوي ده.
- د مرکزي زاويې د مخامخ قوس اوږدوالی د دې رابطې $\frac{A\hat{O}B}{360^\circ} = \frac{\text{د قوس اوږدوالی}}{\text{د دايرې محيط}}$ څخه په لاس راځي.
- **محيطي زاويه**: هغه زاويه ده چې رأس يې د دايرې پر محيط او ضلعی يې د دايرې وترونه وي، محيطي زاويه بلل کېږي.
- د هرې محيطي زاويې پراخوالی، د هغې د مخامخ قوس له نيمايي سره مساوي دی.
- هره محيطي زاويه، د هغې د مرکزي زاويې نيمايي ده چې د عين قوس په مخامخ کې پر ته ده.
- **مماسي زاويه**: هغه زاويه ده چې يوه ضلعه يې په دايرې مماس او بله يې د دايرې وتر او رأس يې د تماس په ټکي کې د دايرې پر محيط پروت وي، مماسي زاويه بلل کېږي.
- هره مماسي زاويه د هغې مرکزي زاويې نيمايي ده چې د عين قوس په مخامخ پرته وي.
- د دوو دايرو حالتونه يو بل ته:

_ که د دوو دايرو د مرکز ونو د واټن اوږدوالی د هغو د شعاع ګانو له مجموعې څخه لوی وي دايرې غير متقاطع بلل کېږي.

_ که د دوو دايرو د مرکزونو د واټن اوږدوالی د هغو د شعاع ګانو له مجموعې سره مساوي وي دايرې له باندې خوا مماس بلل کېږي.

_ که د دوو دايرو د مرکزونو اوږدوالی د هغو د شعاع ګانو له اوږدوالي څخه کوچنی او د شعاع ګانو د تفريق حاصل يې له مطلقه قيمت څخه لوی وي، متقاطع بلل کېږي.

_ که د دايرو د مرکزونو تر منځ واټن، د هغې د شعاع ګانو د تفريق حاصل مطلقه قيمت سره مساوي وي دايرې (دننه) مماس دی.

_ که د دايرو د مرکزونو تر منځ واټن صفر وي دايرې متحد المرکز(د يوه مرکز لرونکي) بلل کېږي.

د لومړي څپرکي پوښتني

• په لاندې پوښتنو کې د هرې پوښتنې لپاره، څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب په نښه کړئ.

1- د یوې دایرې د قطر اوږدوالی مساوي دی په:

a) $3r$ b) π c) 2π d) $2r$

2- دایره په لاندې ډول ښودل کېږي:

a) 0 b) $(1,2)$ c) (b,a) d) $C(o,r)$

3- هغه مستقیمه کرښه چې له دایرې سره یو ګډ ټکی ولري:

a) د وتر په نوم یادېږي. b) د قوس په نوم یادېږي.

c) د مماس په نوم یادېږي. d) د محیط په نوم یادېږي.

4- د هغو ټکو سټ چې واټن یې د دایرې له شعاع څخه لوی وي:

a) د دایرې مخ بلل کېږي. b) د دایرې خارج بلل کېږي.

c) دایره بلل کېږي. d) د دایرې داخل بلل کېږي.

5- هغه وتر چې د دایرې مرکز ته له نورو وترونو څخه نژدې وي نظر نورو وترونوته:

a) لنډ وتر دی. b) اوږد وتر دی.

c) مساوي دی. d) هیڅ یو.

6- که یوه مستقیمه کرښه، دایره په دوو ټکو کې پرې کړي، هغې ته:

a) عمود وایي. b) قاطع وایي.

c) مماس وایي. d) موازي وایي.

7- که د یوې دایرې مرکزي زاویه 80° وي، د مخامخ قوس اندازه یې مساوي په:

a) 90° b) $70'$ c) $80''$ d) 80°

8- یوه مستقیمه کرښه له یوې دایرې سره څو حالتونه لري:

a) 3 b) 7 c) 4 d) 1

9- هغه زاویه چې راس یې د ایرې پر محیط او ضلعې یې دوه وترونه وي:

a) مرکزي زاویه ده. b) مماسي زاویه ده.

c) محیطي زاویه ده.

• تش ځايونه په مناسبو کلمو ډک کړئ:

1- د دايــرې هغــه برخــه چې د وتر په واســطه د دايرې له ســطحې څخه بېله شــوې وي، د دايرې د...................... په نوم يادېږي.

2- د دايرې تر ټولو لوی وتر .... بلل کېږي.

3- د هغو ټکو سټ چې .... د دايرې له شعاع څخه لږ وي د دايرې .... بلل کېږي.

4- که مســتقيمه کرښــه له يوې دايرې سره هېڅ ګډ .... ونلري هغه مستقيمه کرښه له دايرې څخه................... پر ته ده.

5- په هره دايره کې پر وتر................... قطر، وتر نيمايي او .... قوسونه د هغې څخه بېلوي.

6- په هر قايم الزاويه مثلث کې د وتر .... د .... ضلعو د مربعاتو له مجموعې سره مساوي ده.

7- په هره دايره کې هغه وتر چې مرکز ته نژدې وي، تر ټولو .... وتر دی.

8- د دايرې شعاع د تماس په ټکي پر .... عمود وي.

9- مرکزي زاويه هغه زاويه ده چې .... يې د دايرې په مرکز او ضلعې يې د دايرې................... وي.

10- هغه زاويه چې يوه ضلع يې .... په دايره او بله يې د دايرې .... او راس يې د .... په ټکي پروت وي د .... زاويې په نوم يادېږي.

• په لاندې جملو کې سمې او نا سمې جملې د(ص) او (غ) د تورو په واسطه په نښه کړئ.

1- (   ) د يوې مستوي د ټولو ټکو سټ چې د(O) له يوه ټاکلي ټکي څخه د(r) مساوي فاصلې ولري، دايره بلل کېږي.

2- (   ) دايره د خپل محيط په نامه يادېږي.

3- (   ) هغه قطعه خط يا ټوټه کرښه چې د دايرې د محيط دوه ټکي سره نښلوي، د دايرې د قطر په نامه يادېږي.

4- (   ) په يوه دايره کې شعاع يا وړانګه د قطر نيمايي ده.

5- (   ) د دايرې قطعه د($\frown$) په نښه ښودل کېږي.

-6 (   ) د هغو ټکو سټ چې د دايرې له شعاع سره مساوي واټن ولري، د دايرې د باندنۍ ساحه بلل کېږي.

-7 (   ) په يوه دايره کې عمود قطر په وتر، وتر نيمايي او دوه بېلابېل قوسونه منځ ته راوړي.

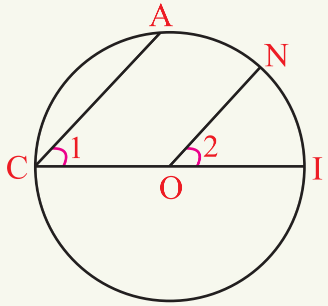
-8 (   ) ټوله دايره، د دايرې د قوس په نوم يادېږي.

-9 (   ) د $d = \frac{r}{2}$ په رابطه کې d قطر او r د دايرې شعاع ده.

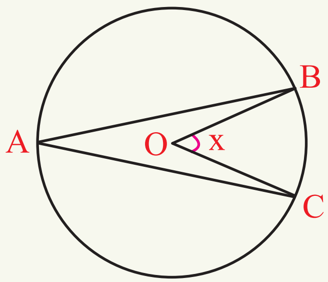
-10 (   ) د يوې دايرې شعاع د تماس په ټکي پر مماس عمود وي.

- لاندې پوښتنې په تفصيل سره حل کړئ.

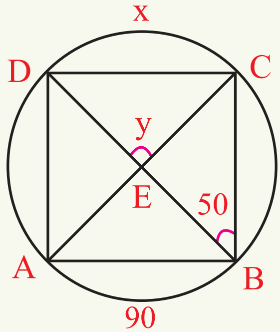
1- په لاندې شکل کې که $\overline{CI}$ د دايرې قطر او $\overline{ON} \parallel \overline{CA}$ وي، ثبوت کړئ چې $\overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{NI}$ دی.



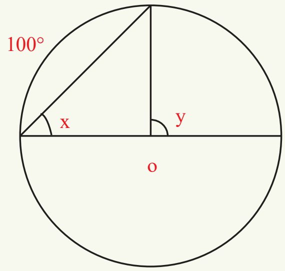
2- په لاندې شکل کې که $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC} = 155^{\circ}$ وي، د $\hat{x}$ پیداکړئ.



3- په لاندې شکل کې د x او y اندازه وټاکئ.



4- په لاندې شکل کې د x او y اندازې پیدا کړئ.

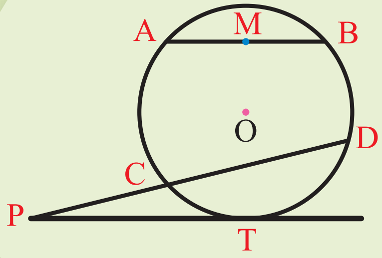


دویم څپرکی

په یوه دایره کې د اوږدوالي اړیکې



په دایره کې د اوږدوالي اړیکې



هغه توټه کرښې چې په مخامخ شکل کې وينئ، نوم يې واخلئ.

تعريف

د اوږدوالي اړيکې: په يوه هندسي شکل کې، د کرښو د اجزاوو تر منځ اړيکې د اوږدوالي د اړيکو په نوم يادېږي.

فعاليت

- د P له ټکي څخه چې د $C(O,r)$ دايرې په بهر کې پروت، د $\overline{PAB}$ او $\overline{PCD}$ قاطع کرښې رسم کړئ.
- د A ټکی له D او د B ټکی له C ټکي سره ونښلوئ.
- وښايئ چې د $P\hat{A}D$ او $P\hat{C}B$ مثلثونه، مشابه دي.
- په پورته دوو مثلثونو کې، د تشابه نسبتونه وليکئ؟

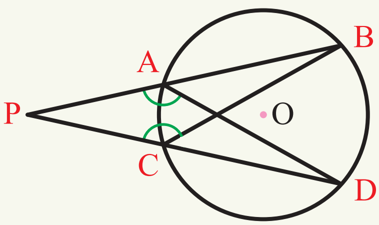
مرسته

- که چېرې په دوه مثلثونو کې دوه زاويې سره مساوي وي، درېمه زاويه يې هم سره مساوي وي.
- په مشابه مثلثونو کې د مساوي زاويو مخامخ ضلعې متناسبې دي.

د دې فعاليت له پايلې څخه لاندې قضيه خرګندېږي.

قضيه(1-2): که چېرې د يوې دايرې له بهرني ټکي څخه پر دايره دوه قاطع کرښې رسم شي، د يوې قاطع د قطعاتو د ضرب حاصل، د بل قاطع د قطعاتو د ضرب له حاصل سره مساوي دي.

يعني: $\overline{PA}.\overline{PB} = \overline{PC}.\ \overline{PD}$



ثبوت: د $\overset{\triangle}{PAD}$ او $\overset{\triangle}{PCB}$ مثلثونو تر منځ، لاندې اړیکې شته دي.

$$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PC}\cdot\overline{PD}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\hat{D}=\hat{B} & \text{د عین قوس محیطي زاویې}\\ \hat{P}=\hat{P} & \text{ګډ}\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{A}=\hat{C}$$

د پورتنیو دري زاویو له تساوي څخه پوهېږو چې د $\overset{\triangle}{PAD}$ او $\overset{\triangle}{PCB}$ مثلثونه مشابه دي، نو لیکلای شو چې:

$$\overset{\triangle}{PCB}\sim\overset{\triangle}{PAD}\Rightarrow\frac{PA}{PC}=\frac{PD}{PB}\Rightarrow PA\cdot PB=PC\cdot PD$$

مثال: په لاندې شکل کې، $\overline{PA}$ او $\overline{PB}$ د $C(O,r)$ د دایرې دوه قاطع کربښې دي. که $\overline{PA}=10cm$, $\overline{PC}=6cm$ او $\overline{PD}=4cm$ اوږدوالی ولري، د $\overline{PB}$ او $\overline{DB}$ اوږدوالی پیدا کړئ؟

حل: هغه قطعات(ټوټه کربښې) چې د P له ټکي څخه رسمېږي او د(1-2) قضیې په مرسته لیکلای شو چې:

$\overline{PA}\cdot\overline{PC}=\overline{PB}\cdot\overline{PD}$

$10\cdot 6=\overline{PB}\cdot 4$

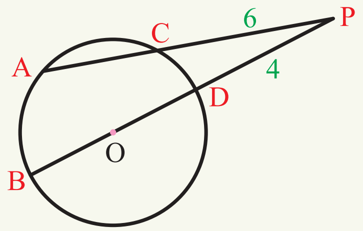
$60=4\overline{PB}$

$\overline{PB}=15cm$

$\overline{DB}=\overline{PB}-\overline{PD}$

$\overline{DB}=15-4$

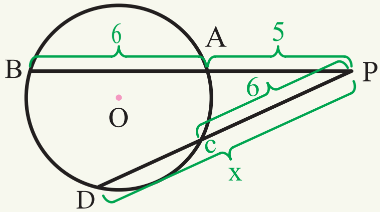
$\overline{DB}=11cm$

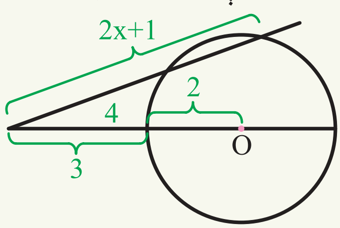


که چیرې د یوې دایرې له بهرني ټکي څخه، پر دایره دوه قاطع کربښې رسم شي، د یوې قاطع د قطعاتو د ضرب حاصل، د بل قاطع د قطعاتو د ضرب له حاصل سره مساوي دی.

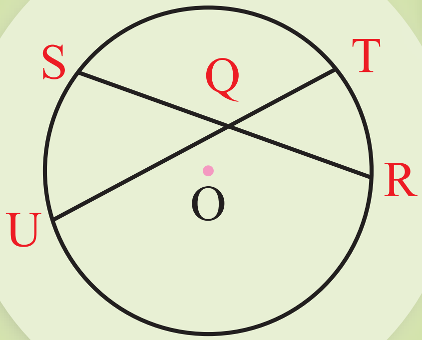
پوښتنې

1- په لاندې شکلونو کې، د x عددي قیمت پیدا کړئ.



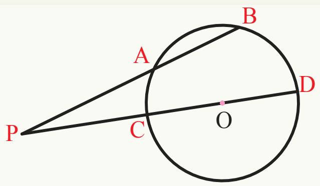


د یوه ټکي طاقت، نظر دایرې ته



مخامخ شکل ته پاملرنه وکړئ، ویلای شئ چې د $\overline{QR}\cdot\overline{QS}=\overline{QU}\cdot\overline{QT}$ مساوات سم دی.

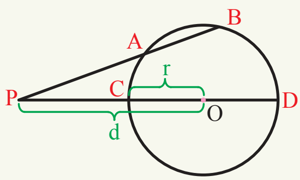
فعالیت



- د P له یوه ټاکلي ټکي څخه چې $C(O,r)$ د دایرې څخه بهر پروت دی پر هغه د $\overline{PAB}$ قاطع رسم کړئ.
- د P له بهرنی ټکي څخه، د $\overline{PCD}$ قاطع داسې رسم کړئ چې د $C(O,r)$ دایرې له مرکز څخه تیر شي.
- د $\overline{PAB}$ او $\overline{PCD}$ د قطعه خطونو ترمنځ اړیکې د (2-1) قضیې له مخې ولیکئ.
- په پورتنی اړیکه کې، د $\overline{PC}$ او $\overline{PD}$ اوږدوالی، د دایرې له مرکز څخه ولیکئ؟
- که د P ټکي واټن، د دایرې له مرکز څخه په (d) او شعاع یا وړانګه په (r) سره وښیو، پورتنی اړیکه د d او r تر منځ ولیکئ.

د پاسنی فعالیت له پایلې څخه لاندې قضیه څرګندیږي.

قضیه (2-2): که د یوه ټاکلي ټکي څخه دوې قاطع کربنې، په یوه دایره داسې رسم کړئ چې، دویمه قاطع د دایرې له مرکز څخه تیره شي. د لومړی قاطع د ټوټه کربنو تر منځ د ضرب حاصل د یوه ټاکلي اندازې (d^2-r^2) سره مساوي دی، (d) د ټاکلي ټکي او د دایرې د مرکز تر منځ واټن او (r) د دایرې شعاع یا وړانګه ده.



لومړی حالت: که چیرې ټاکلی ټکی د دایرې په بهر کې پروت وي.

ثبوت: که چیرې د P ټکی د دایرې په بهر کې او واټن یې له مرکز څخه په (d) او د دایرې شعاع په (r) سره وښیو، د (2-1)

$$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PC}\cdot\overline{PD}....(2-1)$$
$$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=(\overline{PO}-\overline{CO})(\overline{PO}+\overline{OD})$$
$$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=(d-r)(d+r)$$
$$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=d^2-r^2$$

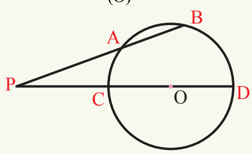
تعریف

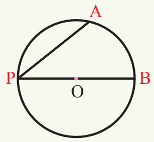
د $\overline{PA}\cdot\overline{PC}=d^2-r^2$ اړیکه د P د ټکي طاقت، نظر د C(o,r) دایرې ته وایي چې ثابته اندازه ده چې د $P_{(o)}=d^2-r^2$ په شکل ښودل کېږي.

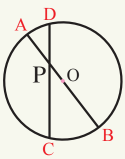
لومړی مثال: که د یوې دایرې قطر $10cm$ او د P ټکی د $13cm$ په اندازه، د دایرې له مرکز څخه واټن ولري، د P ټکي طاقت، نظر C(o,r) دایرې ته پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې د دایرې قطر راکړل شوی دی، لومړی د دایرې شعاع وروسته د P ټکي طاقت، نظر دایرې ته پیدا کړئ.

$$r=\frac{D}{2}=\frac{10}{2}=5\,cm$$
$$P_{(O)}=d^2-r^2$$
$$P_{(O)}=(13)^2-(5)^2$$
$$P_{(O)}=169-25\Rightarrow P_{(O)}=144$$







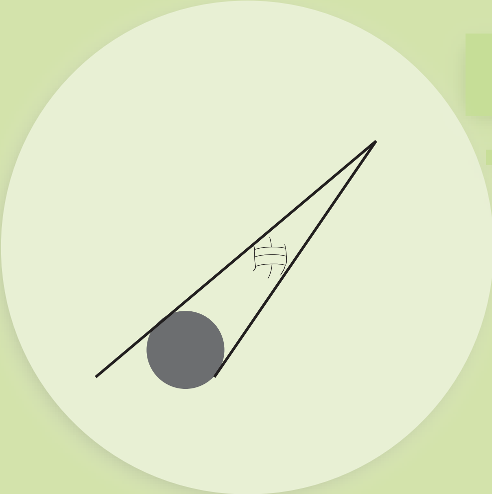
- که د یوه ټکي طاقت نظر یوې دایرې ته مثبت وي، ټکی له دایرې څخه بهر پروت دی، $P_{(o)}=d^2-r^2>0\Rightarrow d^2>r^2$ لکه د(2-2) قضیې شکل
- که د یوه ټکي طاقت نظر دایرې ته صفر وي، ټکی د دایرې پر محیط پروت دی، یعني $P_{(0)}=d^2-r^2=0\Rightarrow d^2=r^2$
- که د یوه ټکي طاقت، نظر دایرې ته منفي وي ټکی د دایرې دننه پروت دی، یعني $P_{(0)}=d^2-r^2<0\Rightarrow d^2<r^2$

پوښتنې

۱– په لاندې حالتونو کې د یوه ټکي طاقت نظر یوې دایرې ته پیدا کړئ.

الف) که $d=7$ او $r=4$ وي. ب) که $d=3$ او $r=3$ وي. ج) که $d=3$ او $r=5$ وي.

د دايرې مماس کرښه



شکل ته پام وکړئ.
که چيرې د نور د وړانګو د حرکت مسير مستقيمې کرښې ومنل شي، دغه کرښې نظر توپ او د هغه له سيورې سره څه اړيکې لري؟

فعاليت

- د P له يوه بهرني ټکي نه د $C(O,r)$ په دايره د $\overline{PR}$ او $\overline{PQ}$ دوه مماسونه رسم کړئ.
- که د Q او R ټکي پر دايرو د تماس ټکي وي.آيا د P د ټکي پر دايرې بل مماس رسمېدلای شي؟
- د O ټکي د Q،R او P ټکو سره و نښلوئ.
- لاسته راغلي مثلثونه څه اړيکې سره لري؟
- آيا رسم شوي مماسونه سره برابر دي؟

د دې فعاليت له پايلې څخه لاندې قضيه څرګندېږي.

قضيه(2-3): د يوې دايرې له بهرني ټکي څخه پر دايرې دوه مساوي مماسونه رسمېږي.

ثبوت: په $\overset{\Delta}{POR}$ او $\overset{\Delta}{POQ}$ مثلثونو کې ليکلی شو چې:

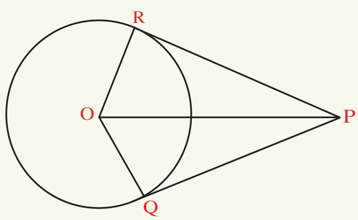
$\overline{OR} = \overline{OQ}$.... د دايرې شعاع يا وړانګه

$\overline{PO} = \overline{PO}$ .... ګډ

$\hat{R} = \hat{Q}$..............90°

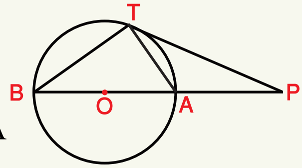
$\overset{\Delta}{POR} \cong \overset{\Delta}{POQ}$

$\overline{PR} = \overline{PQ}$



قضيه(2-4): که د P له ټکي څخه د $\overline{PT}$ مماس او د $\overline{PB}$ يو قاطع پر يوه دايره رسم شي، ثبوت کړئ چې د يوه ټکي طاقت، نظر دايرې ته، د مماس له مربع سره مساوي دی.

ثبوت: د $C(O,r)$ په دایره کې، $\overline{PT}$ مماس او $\overline{PAB}$ قاطع دی، که د T ټکی له A او B ټکوسره ونښلوو، د $\overset{\Delta}{PTA}$ او $\overset{\Delta}{PTB}$ مثلثونو څخه لیکلای شو چې:



$\hat{PTA} = \hat{PBT}$.....(I) د عین قوس مخامخ

$\hat{P} = \hat{P}$..........(II) (مشترک)

$\Rightarrow \overset{\Delta}{PTB} \sim \overset{\Delta}{PTA}$

د I او II رابطو له مخې لیکلای شو چې:

$\hat{PTB} = \hat{PAT}$

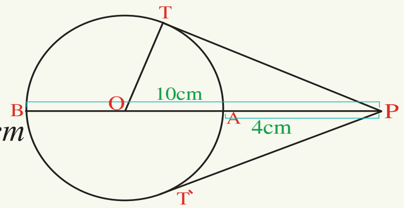
$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PT}} = \frac{\overline{PT}}{\overline{PB}}$$

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PT}^2 \Rightarrow \overline{PT}^2 = d^2 - r^2$$

په پایله کې لیکلای شو چې: $PT = PT'$

مثال: په لاندې شکل کې د $\overline{PT}$ او $\overline{PT'}$ اوږدوالی لاسته راوړئ.

حل:



$PA = 4cm$

$PB = 10cm$

$PT = ?$

$PT^2 = PA \cdot PB$

$PT^2 = 4 \times 10 = 40$

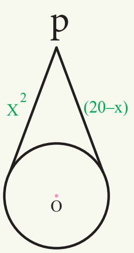
$PT = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}cm$

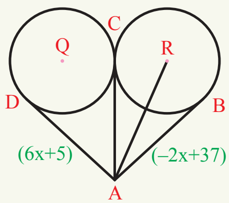
- د یوې دایرې له باندنې ټکي څخه پر هغې دوه مساوي مماسونه رسمولای شو.

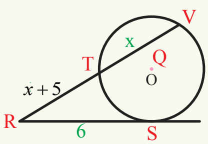
که چیرې د یوې دایرې له بهرنی ټکي څخه پر دایرې یو قاطع او یو مماس رسم شي، د یوه ټکي طاقت نظر دایرې ته، د مماس له مربع سره مساوي دی.

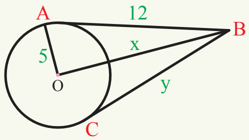
پوښتنې

په لاندې شکلونو کې د x قیمت لاسته راوړئ.

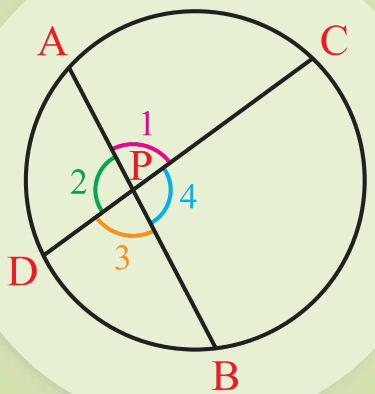








د دايرې دننۍ (داخلي) زاويه



د يوې دايرې په دننه کې، دوه متقاطع وترونه رسم کړئ او وواياست چې څو زاويې جوړې او څه يې نوموئ؟

تعريف

هغه زاويې چې د دايرې په دننه کې، د دوو وترونو د تقاطع په مرسته منځ ته راځي، د دايرې دننۍ زاويې بلل کيږي، لکه په پورتني شکل کې، د $\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4}$ زاويې.

فعاليت

- د $C(O,r)$ دايره رسم کړئ، په هغې کې د $\overline{AB}$ او $\overline{CD}$ دوه وترونه داسې رسم کړئ چې د P په ټکي که يو بل پرې کړي، هغه زاويې چې منځ ته راغلې د څه په نامه يادېږي؟
- د D او C ټکي د B سره ونښلوئ د $\widehat{CPB}$ زاويه چې د $\overset{\Delta}{PBD}$ باندنۍ زاويه ده، د مثلث د دوو ناګاونډيو زاويو سره څه اړيکه لري؟

په ياد ولرئ:

- هره محيطي زاويه، د مخامخ قوس نيمايي ده.
- په يوه مثلث کې، د هرې خارجي زاويې پراخوالی د دوو ناګاونډيو زاويو له مجموعې سره برابره دی.

د دې فعاليت له پايلې څخه، لاندې قضيه بيان او ثبوتوو.

قضيه (5-2): د يوې دايرې د هرې دننه (داخلي) زاويې پراخوالی، د هغو قوسونو د مجموعې له نيمايي سره مساوي دی چې د زاويو د اضلاعو په مرسته د دايرې له محيط څخه جلا کيږي.

ثبوت: څرنګه چې د $\hat{B}$ او $\hat{D}$ د دايرې محيطي زاويې دي، نو کولای شو وليکو:

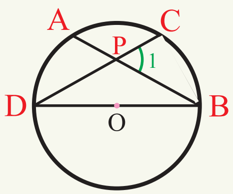
$\hat{B} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AD}$ د محيطي زاويې وسعت

$\hat{D} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$ د محيطي زاويې وسعت

$\widehat{CPB} = \hat{B} + \hat{D}$ د هر مثلث خارجي زاويه

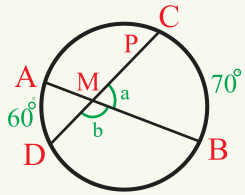
$$\Rightarrow \widehat{CPB} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AD} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$$

$$\widehat{CPB} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BC})$$



لومړی مثال: په لاندې شکل کې د $\hat{a}$ او $\hat{b}$ زاويې پيدا کړئ.

حل: څرنګه چې د يوې دايرې دننه زاويې پراخوالی، د هغو قوسونو دمجموعې له نيمايي سره مساوي دی، چې د زاويو په مخامخ کې پراته وي، يعني:

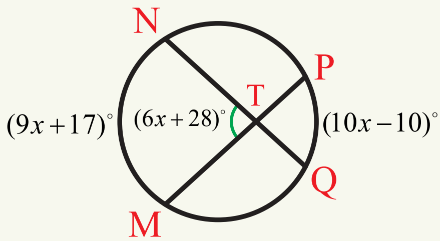


$$C\hat{M}B = \hat{a} = \frac{\hat{AD} + \hat{BC}}{2} = \frac{60^\circ + 70^\circ}{2} = 65^\circ$$

$$\hat{b} = 180^\circ - a = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$$

دويم مثال: په لاندې شکل کې د x او $N\hat{T}M$ زاويې پراخوالی وټاکئ.

حل: د يوې دايرې دننه زاويو د اړيکو له مخې ليکلای شو چې:



$$\overset{\frown}{NM} = 9x + 17 \quad , \quad \overset{\frown}{PQ} = 10x - 10$$

$$N\hat{T}M = 6x + 28$$

$$6x + 28 = \frac{\overset{\frown}{NM} + \overset{\frown}{PQ}}{2}$$

$$6x + 28 = \frac{9x + 17 + 10x - 10}{2}$$

$$12x + 56 = 19x + 7$$

$$-7x = -49$$

$$x = 7$$

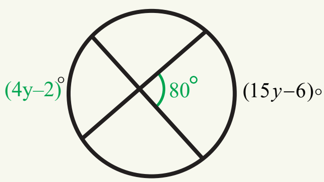
$$N\hat{T}M = 6x + 28$$

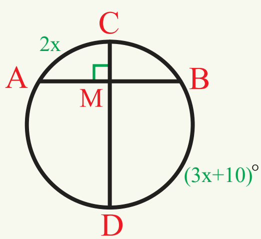
$$= 6 \times 7 + 28 = 42 + 28 \Rightarrow N\hat{T}M = 70^\circ$$

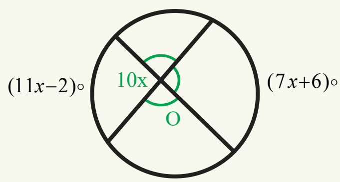
$$N\hat{T}M = 70^\circ$$

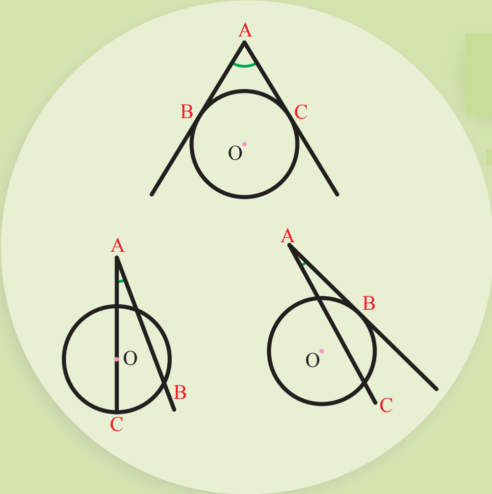
پوښتنې

1- په لاندې شکلونو کې د x او y اندازې معلومې کړئ.









د دايرې باندنۍ زاويه

په مخامخ شکلونو کې، د ټوټه کرښو او د زاويو نومونه واخلئ.

تعريف

هغه زاويه چې د دوو قاطع کرښو، دوو مماسونو يا د يو قاطع او يوه مماس له پرېکړې څخه د دايرې په بهرکې منځ ته راغلې وي، د دايرې باندنۍ زاويه بلل کېږي.

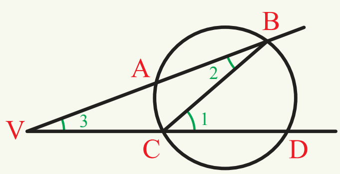
فعاليت

- د $C(O,r)$ په دايره کې د $\overline{AB}$ او $\overline{CD}$ دوه غير موازي وترونه غزوو، ترڅو د $B\hat{V}D$ بهرنۍ زاويه منځ ته راشي د C ټکی له B سره ونښلوئ.
- د $\overset{\Delta}{BVC}$ مثلث باندنۍ زاويه يعنې ($\hat{1}$) د مثلث د دوو ناګاونډيو زاويو سره څه اړيکې لري؟

د دې فعاليت له پايلې څخه لاندې قضيه بيانېږي.

قضيه (6-2): د يوې دايرې د باندنۍ زاويې پراخوالی، د هغو قوسونو د توپير له نمايي سره مساوي دی چې د وترونو له تقاطع څخه منځ ته راغلې وي.

ثبوت: د B ټکی له C سره نښلوو او $\overset{\Delta}{VBC}$ مثلث کې لرو چې:



$\hat{1} = \hat{2} + \hat{3}$ د مثلث خارجي زاويې پراخوالی

$\hat{3} = \hat{1} - \hat{2}$ د محيطي زاويې پراخوالی

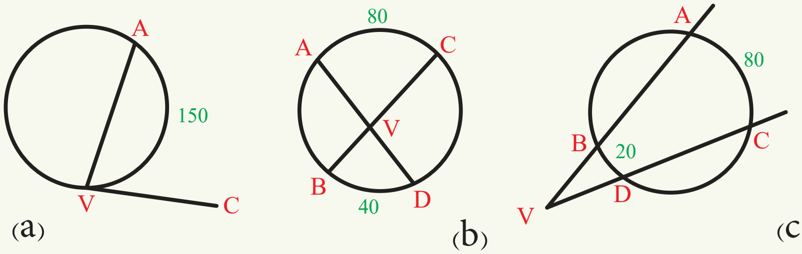
$\hat{1} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}$

$\hat{2} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$ د محيطي زاويې پراخوالی

$$\Rightarrow \hat{3} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BD} - \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$$

$$B\hat{V}D = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{AC})$$

لومړی مثال: په لاندې شکلونو کې د $\hat{AVC}$ زاویو پراخوالی پیدا کړئ.



حل: په دایره کې دننه، دباندې او مماسي زاویو له پراخوالي څخه په ګټې اخستلو سره لیکلای شو، چې:

$$a)\ \hat{AVC}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AV}=\frac{1}{2}\cdot(150)^{\circ},\quad \hat{AVC}=75^{\circ}$$

$$b)\ \hat{AVC}=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD})=\frac{1}{2}\cdot(80+40)^{\circ},\quad \hat{AVC}=60^{\circ}$$

$$c)\ \hat{AVC}=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{BD})=\frac{1}{2}\cdot(80-20)^{\circ},\quad \hat{AVC}=30^{\circ}$$

دویم مثال: له لاندې شکل څخه په ګټې اخیستلو سره د x او قیمتونه پیدا کړئ.

$$\hat{ANB}=\frac{x+y}{2}\Rightarrow 70=\frac{x+y}{2}\Rightarrow x+y=140.....I$$

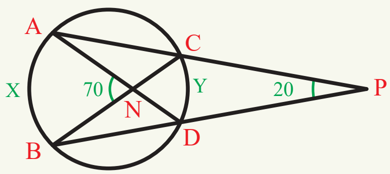
$$\hat{APB}=\frac{x-y}{2}\Rightarrow 20=\frac{x-y}{2}\Rightarrow x-y=40.....II$$

که چیرې د I او II اړیکې خوا په خوا جمع کړو لرو چې:

$2x=180^{o}$

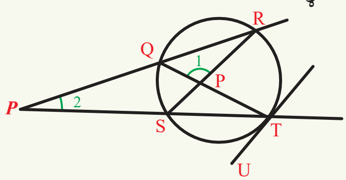
$x=90^{o}$

$y=50^{o}$



پوښتنې

په لاندې شکلونو کې نا معلوم کمیتونه پیدا کړئ.

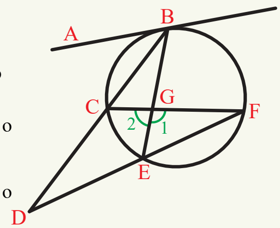


$\overset{\frown}{QR}=120^{o}$

$\overset{\frown}{RT}=90^{o}$

$\overset{\frown}{QS}=50^{\circ}$

$\hat{STU}=?\quad,\quad \hat{1}=?\quad,\quad \hat{2}=?$



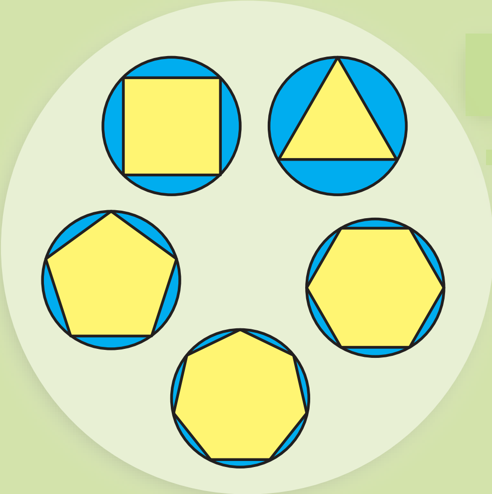
$\overset{\frown}{BC}=90^{o}$

$\overset{\frown}{BF}=110^{o}$

$\overset{\frown}{EF}=110^{o}$

$\hat{1}=?\ ,\ \hat{2}=?\ ,\ \hat{D}=?\ ,\ \hat{ABC}=?$

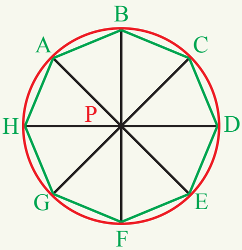
محیطي دایره



مخامخ شکل ته پام وکړئ، کوم هندسي شکلونه چې وینئ نومونه يې واخلئ.

تعریف

هغه دایره چې د مضلع له رأسونو څخه تېره شوې وي محیطي دایره بلل کېږي او مضلع مرسوم په دایره کې بلل کېږي، لکه په مخامخ شکل کې:



د مثلث محیطي دایره: هغه دایره چې د مثلث له درې رأسونو څخه تېره شوې وي، د مثلث د محیطي دایرې په نامه یادېږي.

فعالیت

- د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث رسم کړئ.
- د $\overline{AC}$ او $\overline{BC}$ د اضلاع ګانو عمودي ناصفونه رسم کړئ.
- پورتنی عمودي ناصفونه په څو ټکو کې پرې کوي؟ د هغې د تقاطع ټکی په O سره وښیئ.
- د $\overline{OA}$، $\overline{OB}$ او $\overline{OC}$ اوږدوالی سره پرتله کړئ.
- که چېرې یوه دایره د O په مرکز او د $\overline{OA}$ په شعاع رسم شي آیا د B او C له ټکو تېرېږي او که نه؟
- آیا دا دایره د B او C له ټکو څخه هم تېرېږي؟ ولې؟
- رسم شوې دایره، د مثلث د څه په نامه یادېږي؟

په یاد ولرئ چې:
هغه دایره چې د مضلع د راسونو څخه تیرېږي، مضلع ته مرسوم په دایره وایي.

ددي فعالیت له پایلې څخه په لاندې ډول لیکلای شو:

پایله:د اضلاع گانو د وسطي عمودونو د پرېکړې ټکی، د مثلث د محیطي دایرې مرکز دی.

مثال: د $\overset{\Delta}{ABC}$ قایم الزاویه مثلث داسې رسم کړئ چې د قایمو څنډو اوږدوالی یې ، په ترتیب سره $8cm$ او $6cm$ وي، د دې مثلث د محیطي دایرې شعاع لاس ته راوړئ؟

حل: پوهېږو چې په هر قایم الزاویه مثلث کې د هغې د محیطي دایرې مرکز پر وتر باندې پروت وي، نو لومړی د قایم الزاویه مثلث د وتر اوږدوالی پیدا کوو چې د نیمایي ټکی یې د محیطي دایرې مرکز دی.

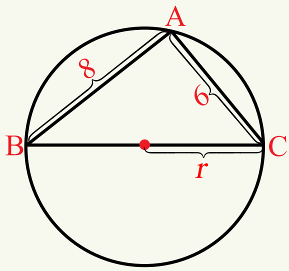
$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$$

$$\overline{BC}^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$$

$$\overline{BC}^2 = 100$$

$$\overline{BC} = 10cm$$

$$r = \frac{\overline{BC}}{2} \Rightarrow r = \frac{10}{2} = 5cm$$



• هغه دایره چې د مضلع له رأســونو څخه تېرېږي د مضلع محیطي دایرې په نامه یادېږي او مضلع ته مرسوم په دایره وایي.

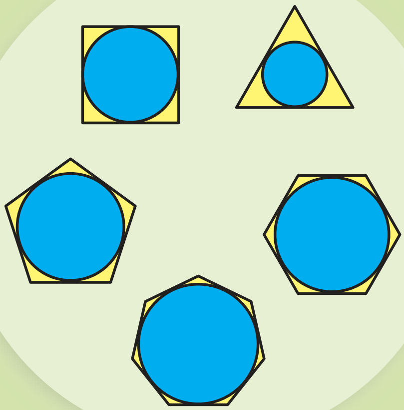
• د یوه مثلث د اضلاعو د منځنۍ(وسطي) عمودونو د تقاطع ټکی د مثلث د محیطي دایرې مرکز دی.

پوښتنې

1- یو مثلث چې د اضلاعو اوږدوالی یې په ترتیب سره $3cm$, $4cm$ او $5cm$ وي، رسم کړئ، د هغې د محیطي دایرې شعاع حساب کړئ.

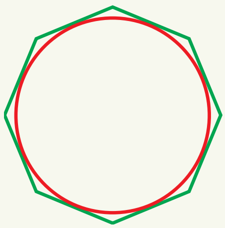
2 - د قایم الزاویه مثلث، متساوي الاضلاع او متساوي الساقین مثلثونو د محیطي دایرو مرکزونه په کومو ځایونو کې موقعیت لري؟ په شکل کې یې وښایاست.

محاطي دايره



- هغه هندسي شکلونه چې په مخامخ شکل کې وينئ، نومونه يې واخلئ.
- د شکلونو تر منځ څه اړيکې وينئ؟

تعريف



هغه دايره چې محيط يې د مضلع پر ضلعو باندې مماس وي، د مضلع د محاطي دايرې په نامه يادېږي، لکه: مخامخ شکل، چې د مضلع په واسطه راچاپېره شوی دی.

د مثلث محاطي دايره: هغه دايره چې محيط يې د يو مثلث په درې ضلعو مماس وي، د مثلث محاطي دايره بلل کېږي.

فعاليت

مرسته:
د يوه مثلث وسطي عمودونه د مثلث دننه په يوه ټکي کې پرېکوي

- د $\overset{\Delta}{ABC}$ يو کيفي مثلث رسم کړئ.
- د $\hat{A}, \hat{B}$ او $\hat{C}$ زاويو ناصفونه رسم او د تقاطع ټکی په (O) سره وښياست.
- د (O) لـه ټکي څخه د مثلث پر اضلاعو د $\overline{OM}, \overline{ON}$ او $\overline{OP}$ عمود کرښې رسم کړئ.
- د $\overline{OM}, \overline{ON}$ او $\overline{OP}$ عمودونو اوږدوالي پرتله کړئ.
- آيا هغه دايره چې د (O) په مرکز او د $\overline{ON}$ په شعاع رسم شي، د M او P له ټکو څخه تېرېږي؟ ولې؟
- رسم شوې دايره، د څه په نامه يادېږي؟

د مثلث محاطي دايره

د هر مثلث دننه ناصف الزاويو ترمنځ د تقاطع ټکی، د مثلث د محاطي دايرې له مرکز څخه عبارت دی.

د پورتني فعاليت پايله کولای شو په لاندې توګه ځرګنده کړو.

فعاليت

د مثلث محاطي دايره رسم کړئ.

- د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث رسم کړئ او $\overline{AB}$ او $\overline{AC}$ ضلعو ته امتداد ورکړئ؟
- د مثلث د $\hat{B}$ او $\hat{C}$ زاويو باندنی ناصف الزاويې رسم او د تقاطع ټکی په (O) سره وښيئ.
- ايا د (O) ټکی د مثلث د محاطي دايرې مرکز کيدای شي؟ ولې؟
- د (O) له ثابت ټکي څخه د $\overline{OP}$, $\overline{OM}$ او $\overline{ON}$ عمودونه کرښې، د مثلث په يوه ضلعه او د هغه په امتداد رسم او وښيئ چې د O دايرې شعاع ګانې دي.

فکر او څېړنه وکړئ:

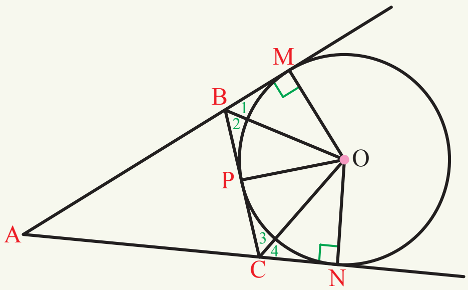
- که چيرې د يوې څلور ضلعې د مخامخ زاويو مجموعه 180° وي څلور ضلعي په دايره مرسوم دي.

په ياد ولرئ:

- هر منظم مضلع محيطي او محاطي دايره لري.

د پورتني فعاليت پايله کولای شو، په لاندې توګه ځرګنده کړو.

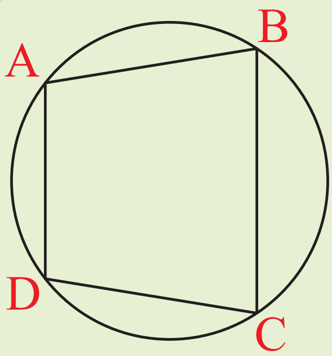
هغه دايره چې د يوه مثلث په يوه ضلع او د دوو ضلعو پر امتداد مماس وي، د هغه مثلث محاطي دايره بلل کيږي.



پوښتنې

1- په کومو مثلثونو کې د محيطي دايرې او محاطي دايرې مرکزونه منطبق دي؟ هغه رسم او په شکل کې يې وښيئ.

په دايره کې د مرسوم څلورضلعي څانګړتياوې(خواص)



په مخامخ شکل کې دايره د څلور ضلعي له رأسونو سره څه اړيکه لري؟

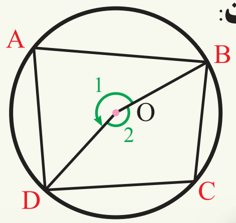
فعاليت

- د $ABCD$ يو کيفي څلور ضلعي مرسوم په دايره رسم کړئ.
- د محيطي دايرې منځ ته راغلې زاويې څه نومېږي؟
- د دايرې مرکز، د څلور ضلعي له دوو مخامخ رأسونو سره ونښلوئ، د منځ ته راغلې مرکزي زاويې مجموعه څو درجې ده؟
- د مرکزي او محيطي زاويو اړيکې چې د عين قوس مخامخ پرتې وي د پورته مرکزي زاويو لپاره وليکئ.

د دې فعاليت له پايلې څخه لاندې قضيه داسې بيانولای شو:

قضيه: په يوه دايره کې، د مرسوم څلور ضلعي د مخامخ زاويو مجموعه 180° ده.

ثبوت:



$$\hat{O}_1+\hat{O}_2=360^\circ$$

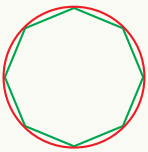
$$D\hat{C}B=\frac{1}{2}\hat{O}_1$$

$$D\hat{A}B=\frac{1}{2}\hat{O}_2$$

$$D\hat{C}B+D\hat{A}B=\frac{1}{2}(\hat{O}_1+\hat{O}_2)=\frac{360^\circ}{2}=180^\circ$$

فعاليت

- منظم درې ضلعي، د څه په نامه يادېږي، د هرې زاويې پراخوالی څو درجې دی؟
- منظم څلور ضلعي څرنګه ونومو؟
- د هغې د هرې زاويې پراخوالی څو درجې دی؟



تعریف

هغه مضلع چې اضلاع او زاویې یې یو له بل سره مساوي وي، منظمه مضلع بلل کېږي.

فعالیت

- په خپله خوښه، یوه پنځه ضلعي رسم کړئ.
- یو رأس چې د هغې له ناګاونډه رأس سره ونښلوئ، څو مثلثونه منځ ته راځي؟
- د دې مثلثونو دننیو زاویو مجموعه څو درجې ده؟
- د پنځه ضلعي دننیو زاویو مجموعې په هکله، څه فکر کوئ؟
- دغه فعالیت د یو شپږ ضلعي په هکله تکرار کړئ.
- که چیرې n ضلعي مضلع ولرو، د هغې دننه زاویو مجموعه به یې څو درجې وي؟

که چیرې د یوې مضلع د ضلعو شمېر، په n او د هغې دننه زاویو مجموعه په S_n وښیو، نو د هر n ضلعي دننیو زاویو مجموعه $S_n = (n-2)180^\circ$ درجې ده.

مثال: د یوه څلور ضلعي او لس ضلعي دننیو زاویو مجموعه پیدا کړئ.

حل: د هر مضلع دننیو زاویو مجموعه، د $S_n = (n-2)180^\circ$ اړیکې له مخې تاکل کېږي.

$$S_n = (n-2)(180^\circ)$$

$$S_4 = (4-2)(180^\circ) \Rightarrow S_4 = 360^\circ$$

$$S_{10} = (10-2)(180^\circ) \Rightarrow 8\times180 \Rightarrow S_{10} = 1440^\circ$$

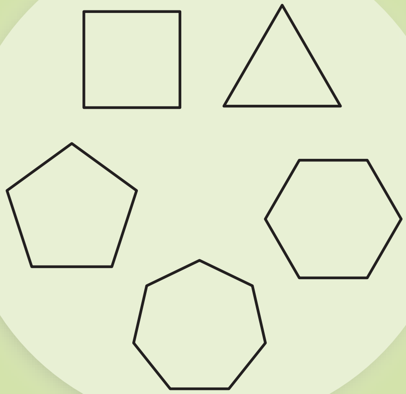
په یاد ولرئ چې:

- د قطرونو شمېر د n ضلعي له یوه رأس څخه د n-3 اړیکې په مرسته لاس ته راځي.
- له یوه رأس څخه د مضلع په منځ کې د مثلثونو شمېر د n-2 اړیکې په مرسته لاسته راځي.
- په یوه دایره کې د مرسوم څلور ضلعي د مخامخ زاویو مجموعه 180° ده.
- هغه مضلع چې د ضلعو اوږدوالی یې سره مساوي وي، منظم مضلع بلل کېږي.

پوښتنې

1- د یوې منظمې شپږ ضلعي مضلع، د زاویو پراخوالی څو درجې دی؟
2- د یوې منظمې n ضلعي مضلع، د زاویو اندازه څو درجې ده؟
3- په یوه لس ضلعي مضلع کې، د قطرونو په مرسته له یوه رأس څخه څو مثلثونه منځ ته راځي؟

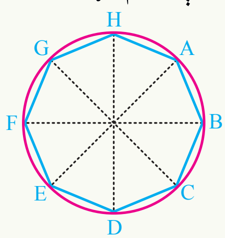
د منظمې مضلع ترسیم



- پام وکړئ.
- په مخامخ شــکل کې، څه ډول مضلع ګانې وینئ.
- ستاســې په نظر، دغه مضلع ګانې په څه ډول رسم شوې دي؟

فعالیت

- د $C(O,r)$ دایره رسم کړئ او د هغې په مرکز کې(8) مساوي مرکزي زاویې رسم کړئ.
- که چیرې n د مضلع د اضلاعو شمېر او θ د مخامخ ضلعې مرکزي زاویه وي، آیا د $\hat{\theta} = \frac{360^\circ}{n}$ اړیکه سمه ده؟
- یو 8 ضلعي مضلع، د $C(O,r)$ په دایره کې رسم کړئ.
- د دایرې له محیط سره د مرکزي زاویو د ضلعو د تقاطع ټکي ونښلوئ.
- آیا د منځ ته راغلې مضلع ضلعې، سره مساوي دي؟ ولې؟



- منځ ته راغلې مضلع څه ډول ده؟ د مضلع د هرې ضلعې د مخامخ مرکزي زاویې پراخوالی څو درجې ده؟

دیوه منظم n ضلعي مضلع، د هر ضلع مخامخ د مرکزي زاویې پراخلوالی مساوي په $\hat{\theta} = \frac{360^\circ}{n}$ دی.

فعالیت

- د $C(O,r)$ په دایره کې یوه منظمه شپږ ضلعي رابنده ده.
- د دایرې مرکز د مضلع له شپږو رأسونو سره نښلوو، څو مثلثونه منځ ته راځي؟
- د شپږ ضلعي د مخامخ ضلعو د مرکزي زاویو پراخوالی څو درجې دی؟
- منځ ته راغلي مثلثونه څه ډول مثلثونه دي؟

د پورتني فعالیت پایله کولای شو، په لاندې توګه څرګنده کړو.

د يوې شپږ ضلعي، د هرې ضلعې اوږدوالی، د هغې د محيطي دايرې له شعاع سره مساوي دی.

مثال: هغه دايره چې شعاع يې $2cm$ دی، څرنګه کولای شو چې هغه په يوه منظم شپږ ضلعي مضلع محاط کړو؟

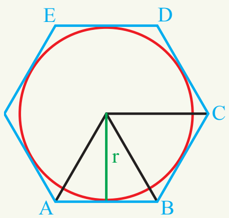
حل: پوهيږو چې د هرې منظمې شپږ ضلعي مضلع هره ضلع، د هغې د محيطي دايرې له شعاع سره مساوي ده، نو د پرکار خوله د $2cm$ په اندازه خلاصوو او په پرله پسې توګه، د دايرې له محيط څخه مساوي قوسونه جلاکوو. د ټاکل شويو ټکو له نښلولو څخه منظم شپږ ضلعي منځ ته راځي.

د محاطي دايرې د شعاع له مخې، د منظمې مضلع مساحت

فعاليت

- د $C(O,r)$ محاطي دايره او د $ABCDEF$ منظمه مضلع رسم کړئ.
- د O ټکی د B, A او C رأسونو سره ونښلوئ. د $\overset{\Delta}{OAB}$ او $\overset{\Delta}{OBC}$ مثلثونه چې منځ ته راغلي دي، انطباق منونکي دي؟ ولې؟
- د $\overset{\Delta}{AOB}$ په مثلث کې د $\overline{AB}$ د ضلعې جګوالی(ارتفاع)، د محاطي دايرې له شعاع سره مساوي دی؟ ولې؟
- د پورتنيو مثلثونو مساحت له کومې رابطې څخه په لاس راځي؟
- آيا د منظمې n ضلعي مضلع مساحت د n انطباق منونکو مثلثونو څخه جوړ دی؟
- د منظمې مضلع محيط د $P = AB \cdot n$ له اړيکې يا رابطې څخه لاسته راځي؟ ولې؟

که چیرې د منظمې مضلع مساحت په A، محيط يې په P او د يوې منظمې n ضلعي مضلع د محاطي دايرې شعاع، په r سره وښيو، نو د مضلع مساحت عبارت دی له: $A = \frac{1}{2}P \cdot r$ چې په لاندې ډول ثبوتيږي:



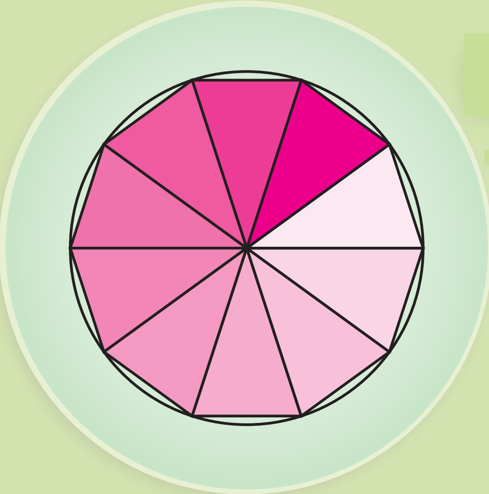
$$A = \frac{1}{2}AB \cdot r \cdot n$$

$$P = AB \cdot n \text{ د مضلع محيط } \Rightarrow A = \frac{1}{2}P \cdot r$$

پوښتنې

1- په يوه دايره کې چې شعاع يې $3cm$ وي، يو متساوي الاضلاع مثلث داسې رسم کړئ چې محاط په دايرې وي؟

د دايرې محيط او مساحت



په راکړل شوي شکل کې، د مثلثونو مجموعي مساحت د دايرې او د مثلثونو د يو شمېر ضلعو د مجموع اوږدوالي، د دايرې له محيط سره پرتله کړئ.

د $C(O,r)$ په دايره کې، که قطر په (d) او محيط يې د (C) په توړو وښودل شي، د دايرې د دې دوو غړو تر منځ لاندې اړيکه شته؟

$$\frac{\text{د دايرې محيط}}{\text{د دايرې قطر}} = \frac{c}{d} = \text{constant}$$

$$\frac{c}{d} = \pi \Rightarrow c = \pi d \; .... \; (I) \quad [\pi \approx 3.14159\cdots]$$

پوهېږو چې $r = \frac{d}{2}$ يا $d = 2r$ که چېرې په(I) اړيکه کې د (d) پر ځای د (2r) قيمت وليکو، د دايرې محيط له لاندې اړيکې څخه لاسته راځي:

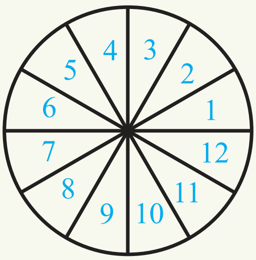
$$C = \pi d$$

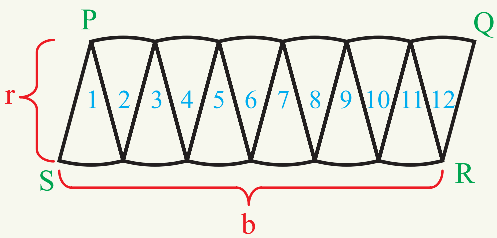
$$C = 2\pi r$$

د دايرې د مساحت د ثبوت او محاسبې لپاره، پرمختللې رياضي ته اړ يو، نو په دې ډول د دايرې د مساحت د محاسبې لپاره، په لاندې توګه عمل کوو:

يوه دايره د هغې د قطرونو په مرسته په(12) مساوي برخو وېشو او هره برخه يې، له 1 څخه تر 12 پورې په شمېرو سره وښيو، که چېرې د دايرې دغه مثلثي ټوټې غوڅې او بيا هغوی څنګ په څنګ د لاندې شکل په څېر ترتيب کړو.

په روښانه ډول ليدل کېږي چې متوازي الاضلاع ته ورته شکل منځ ته راځي.





پوهېږو چې د b قاعده د دايرې د محيط نيمايي ده، ولې ؟ نو:

جګوالی × قاعده = د متوازي الاضلاع مساحت

$= \frac{1}{2}Cr$ د متوازي الاضلاع مساحت

له بلې خوا پوهېږو چې $(C = 2\pi r =$ د دايرې محيط) دی، نو لرو چې:

$= A = \frac{1}{2}\cdot 2\pi r\cdot r = \pi r^2$ د متوازي الاضلاع مساحت

پوهېږو، چې د متوازي الاضلاع مساحت او دايرې سره ډېر نژدې دي، نو ليکلای شو: $A = \pi r^2$

په پايله کې ويلای شو چې د دايرې مساحت، د $A = \pi r^2$ اړيکې او محيط يې، د $C = 2\pi r$ اړيکې په مرسته په لاس راځي.

لومړی مثال: د يوې دايرې شعاع $14cm$ ده، د دايرې مساحت پيدا کړئ.

حل: د دايرې د مساحت له اړيکې څخه په ګټې اخيستلو سره يعنې $A = \pi r^2$ لرو چې:

$A = \pi r^2$

$\pi = (3.14159)$

$A = (3.14159).196cm^2 \Rightarrow A = 615.75cm^2$

دويم مثال: که چيرې د دايرې قطر $70cm$ وي، د دايرې شعاع او مساحت پيدا کړئ.

حل: څرنګه چې د دايرې محيط راکړل شوی دی، نو لومړې شعاع او وروسته مساحت پيدا کوو.

$r = \frac{d}{2} \Rightarrow r = \frac{70}{2} = 35$

$A = \pi r^2 \Rightarrow A = 3.14159(35)^2 \Rightarrow A = 3848.4\,cm^2$

دريم مثال: که چيرې د دايرې محيط، $14\pi cm$ وي، د دايرې شعاع او مساحت پيدا کړئ.

حل: څرنګه چې د دايرې محيط راکړل شوی دی، نو د مساحت پيدا کولو لپاره، لومړی شعاع پيدا کوو.

$C = 14\pi cm$

$2\pi r = 14\pi \Rightarrow 2r = 14 \Rightarrow r = \frac{14}{2} = 7$

$A = \pi r^2 \Rightarrow (3.14159)\cdot 7\cdot 7 \Rightarrow A = 153.93\,cm^2$

- د يوې دايرې مساحت، د r په شعاع د $A = \pi r^2$ له اړيکې څخه لاس ته راوړو.
- د يوې دايرې محيط، د r په شعاع د $C = 2\pi r$ له اړيکې څخه لاس ته راوړو.

پوښتنې

1- که چيرې د يوې دايرې محيط $41cm$ وي، د دايرې شعاع يې لاس ته راوړئ؟

2- د يوې دايرې محيط چې شعاع يې د اوږدوالي يو واحد وي، لاس ته راوړئ.

3- د يوې دايرې مساحت چې شعاع يې د اوږدوالي يو واحد وي لاس ته راوړئ.

د دویم څپرکي لنډیز:

په دایره کې د اوږدوالي اړیکې:

- هغه اړیکې چې د یو هندسي شکل د کرښو د اجزاوو تر منځ موجودې وي، د اوږدوالي د اړیکو په نامه یادېږي.
- که چیرې د یوې دایرې له یوه بهرني ټکي څخه پر دایره دوه قاطع کرښې رسم شي، د یوې قاطع د قطعاتو د ضرب حاصل، د بل قاطع د قطعاتو د ضرب له حاصل سره مساوي دی.

یعني: $\overline{PA}.\overline{PB} = \overline{PC}.\ \overline{PD}$

- که چیرې د یوې دایرې له بهرني ټکي څخه، دوه قاطع کرښې، پر یوه دایره داسې رسم شي چې دویم قاطع د دایرې له مرکز څخه تېر شي، نو د قاطع او د هغه د بهرنی قطعې د ضرب حاصل، له یوې ټاکلې اندازې یعني: $d^2 - r^2$ سره مساوي دی.
- له یوه باندني ټکي څخه، پر یوې دایرې دوه مساوي مماسونه رسمېدلای شي.
- که چیرې $d^2 - r^2 > 0$ یا $d^2 > r^2$ وي ټکی د دایرې په بهر کې پروت دی.
- که چیرې $d^2 = r^2 = 0$ یا $d^2 = r^2$ یا $d = r$ وي، ټکی د دایرې پر محیط پروت وي.
- که چیرې $d^2 - r^2 < 0$ یا $d^2 < r^2$ وي، ټکی د دایرې په دننه کې پروت دی.

د دایرې داخلي زاویې: هغه زاویې چې د قاطع کرښو په مرسته، د دایرې په دننه کې منځ ته راځي، د دایرې داخلي زاویې بلل کېږي.

- د یوې دایرې د هرې دننۍ زاویې پراخوالی، د هغې د مخامخ قوسونو د مجموعې له نیمایي سره مساوي دی. $\hat{\alpha} = \dfrac{\overset{\frown}{a} + \overset{\frown}{b}}{2}$

باندنۍ زاویې:

- هغه زاویه چې د دوو قاطع کرښو، دوو مماسونو، یا یو قاطع او یو مماس له تقاطع څخه د دایرې په بهر کې منځ ته راغلې وي، د دایرې باندنۍ زاویه بلل کېږي.

- د یوې دایرې د هرې باندنۍ زاویې پراخوالی د هغې د مخامخ قوسونو، تفاضل له نیمایي سره مساوي دی، یعني: $\hat{A} = \dfrac{\overset{\frown}{a} - \overset{\frown}{b}}{2}$

مضلع:

- هغه شکل چې د څو ټوټه کرښو په مرسته احاطه شوی وي، مضلع بلل کېږي.

په دې شرط چې:

- دوه ضلعې یې یوازې په خپلو انجامونو کې سره قطع کړئ.
- دوه ګاونډۍ ضلعې، د یوې مستقیمې کرښې په اوږدوالي پرتې نه وي.
- هغه مضلع چې ضلعې او زاویې یې سره مساوي وي، منظم مضلع بلل کېږي.

د مضلع محیطي دایره: هغه دایره چې د مضلع له رأسونو څخه تېره شي، د مضلع محیطي دایره بلل کېږي.

د مضلع محاطي دایره: هغه دایره چې د مضلع پر ضلعو مماس وي، د مضلع محاطي دایره بلل کېږي.

د مثلث محاطي دایره: هغه دایره چې د مثلث پر یوه ضلعه او د دوو نورو ضلعو په امتداد مماس وي، د مثلث محاطي دایره بلل کېږي.

- د دوو متقاطع دایرو د مرکزونو ترمنځ کرښه په ګډوتر عمود ده.
- که چیرې یوه څلور ضلعي مرسوم په دایره وي، د هغې د مخامخ زاویو مجموعه 180^o ده.
- د دایرې محیط، د مخامخ اړیکې په مرسته لاس ته راځي: $C = 2\pi r$
- د دایرې مساحت، د مخامخ اړیکې په مرسته لاسته راځي: $A = \pi r^2$

د دویم څپرکي پوښتنې:

- په لاندې پوښتنو کې د هرې پوښتنې لپاره څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، له سم ځواب څخه دایره راتاوه کړئ.

1- که چیرې د P ټکی، د دایرې پر محیط پروت وي، د یوه ټکي طاقت نظر دایرې ته عبارت دی له:

a) 1 b) 2

c) 0 d) درې واړه ځوابونه سم دي.

2- که چیرې د P یو ټکی د دایرې په دننه کې پروت وي، د دې نقطې طاقت، نظر یوې دایرې ته عبارت دی، له:

a) د P دټکي طاقت مثبت دی. b) د P ټکي طاقت منفي دی.

c) د P ټکي طاقت صفر دی. d) درې واړه ځوابونه سم نه دي.

3- که دP ټکی له دایرې څخه د باندې پروت وي، دP ټکي طاقت نظریوې دایرې ته، عبارت دی، له:

a) $d - r$ b) $d^2 - R^2$

c) $r - d$ d) $R^2 - d^2$

4- که چیرې د یوې دایرې شعاع R او د دایرې دننه ټکي او د مرکز واټن، په d سره وښیو، د نوموړي ټکي طاقت نظر دایرې ته، عبارت دی، له:

a) $R^2 = d^2$ b) $d^2 = R^2$

c) دواړه ځوابونه سم دي. d) دواړه ځوابونه نا سم دي.

5- یو ټکی د $13cm$ په اندازه د $C(O,r)$ دایرې له مرکز څخه واټن لري، که د دایرې قطر $10cm$ وي، د قاطع د بهرنۍ برخې اوږدوالی له نوموړي ټکي په لاندې ځوابونو کې وښیئ:

a) 13 cm b) 10 cm

c) 12 cm d) 8 cm

6- که چیرې د P له ټکي څخه د یو مماس اوږدوالی، د $C(O,r)$ په دایرې $12cm$ او قطر یې 10cm وي، د P او O د ټکو تر منځ واټن عبارت دی، له:

a) 13 cm b) 12 cm

c) 10 cm d) 5 cm

7- که چیرې د $C(O,r)$ د دایرې د $\overline{AB}$ وتر ته، تر P ټکي پورې امتداد ورکړو، داسې چې: $\overline{AP} = 8cm$ او $\overline{BP} = 2cm$ وي، د $\overline{PT}$ د مماس اوږدوالی عبارت دی، له:

a) 4 cm b) 8 cm

c) 2 cm d) درې واړه ځوابونه نا سم دي.

• په لاندې پوښتنو کې تش ځايونه په مناسبو کلمو سره ډک کړئ:

1- $d^2 - r^2$ د يوه ټکي .... نظر يوې دايرې ته دی.

2- که چېرې $\overline{PT}$، د $C(O,r)$ پر دايره مماس وي، د P د ټکي طاقت نظر $C(O,r)$ دايرې ته، عبارت دی له .... $\overline{PT}^2$ دی.

3- که چېرې د P ټکي د دايرې پر محيط پروت وي، نو د ټکي طاقت نظر دايرې ته .... دی.

4- که ټکی د دايرې په دننه کې وي، نو د ټکي طاقت نظر دايرې ته .... دی.

5- که ټکی له دايرې څخه د باندې وي، نو د ټکي طاقت نظر دايرې ته .... دی.

6- که $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$ وي، د C, B, A او D د .... پر محيط پرتې وي او د P ټکی د .... په دننه او يا بهر پروت دی.

7- که د B, A او T ټکي د دايرې پر محيط پراته وي، B, A او P د يوې کرښې په امتداد دی او د P ټکی د دايرې په بهر کې دی. په دې توګه ....= $\overline{PT}^2$ دی.

• د سمو جملو په مخامخ کې د(ص) او د ناسمو جملو مخامخ کې د(غ) توری وليکئ.

1- ( ) د يوه ټکي طاقت نظر دايرې ته، د ټکي او د دايرې د مرکز واټن له مربع سره مساوي دی.

2- ( ) که ټکی د دايرې پر محيط پروت وي، د ټکي طاقت نظر دايرې ته صفر دی.

3- ( ) که ټکی د دايرې په دننه کې وي، د ټکي طاقت نظر دايرې ته منفي دی.

4- ( ) که ټکی د د دايرې په بهر کې وي، دټکي طاقت نظر دايرې ته مثبت دی.

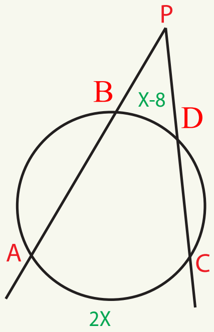
5- ( ) د يوه ټکي طاقت، نظر هرې دايرې ته مثبت دی.

6- ( ) د يوه ټکي طاقت، نظر دايرې ته $d^2 - r^2$ دی که د d د ټکي واټن دايرې ته او r د دايرې شعاع وي.

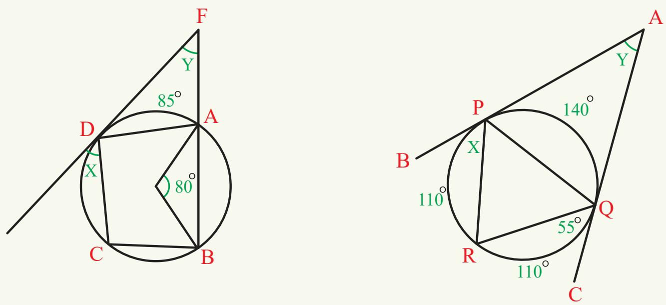
7- ( ) که دوه دايرې مماس وي، د هغوی طاقت نظر ګډ مماس ته په هر ټکي کې مساوي وي.

● لاندي پوښتني په تفصیل سره حل کړئ:

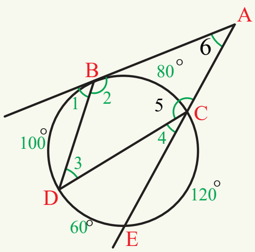
1 - په لاندي شکل کې $\hat{p} = 40^{\circ}$ او مخامخ قوسونه يې، په ترتيب سره $(x-8)^{\circ}$ او $(2x)^{\circ}$ وي د اوږدوالي قوسونو $\overset{\frown}{BD}$ او $\overset{\frown}{AC}$ پيدا کړئ.



2 - په لاندي شکلونو کې د $\hat{x}$ او $\hat{y}$ د زاويو پراخوالى پيدا کړئ.

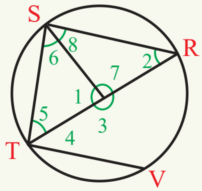


3- په لاندي شکل کې $\overline{AB}$ پر دايره مماس دى، که $\overset{\frown}{DE} = 60^{\circ}$, $\overset{\frown}{DB} = 100^{\circ}$ او $\overset{\frown}{CE} = 120^{\circ}$ وي، د $\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4},\hat{5}$ او $\hat{6}$ زاويو پراخوالى پيدا کړئ.

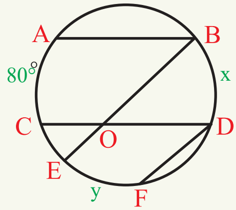


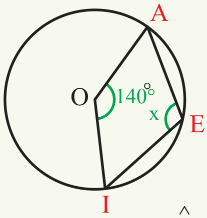
4- د $C(O,r)$ په دايره کې، $RS \parallel TV$, $R\hat{T}S = 50^{\circ}$ او RT د دايري قطر دى، د

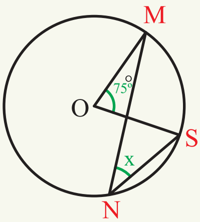
$\hat{2},\hat{3},\hat{4},\hat{5},\hat{6},\hat{7}$ او $\hat{8}$ زاویو اندازه پیدا کړئ.



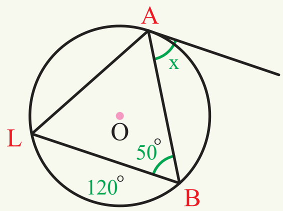
5- په لاندې شکلونو کې د $\hat{x},\hat{y}$ زاویو اندازه، وټاکئ.

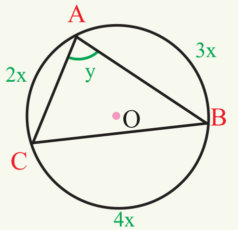


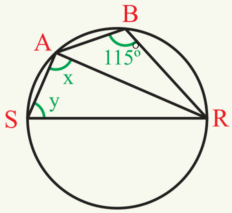




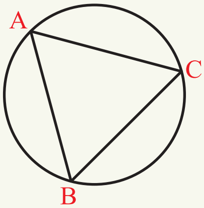
6- په لاندې شکلونو کې د $\hat{x}$ او $\hat{y}$ زاویو اندازه، پیدا کړئ.



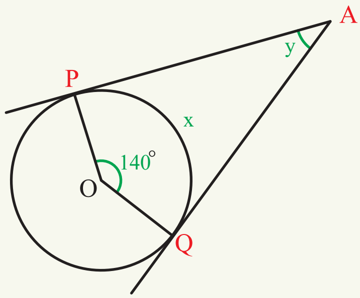


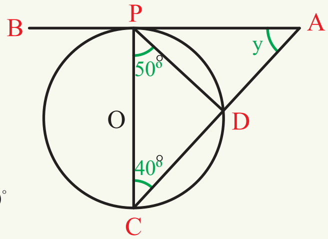


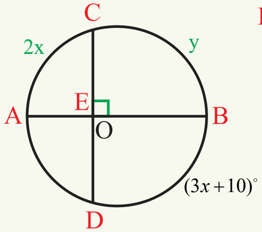
7- د محاطي دایرې د تعریف له مخې وښیئ، چې د هر مثلث دننني زاویو مجموعه 180° وي.



8- په لاندې شکلونو کې، د $\hat{x}$ او $\hat{y}$ زاویو اندازه پیدا کړئ.







دریم څپـــرکی

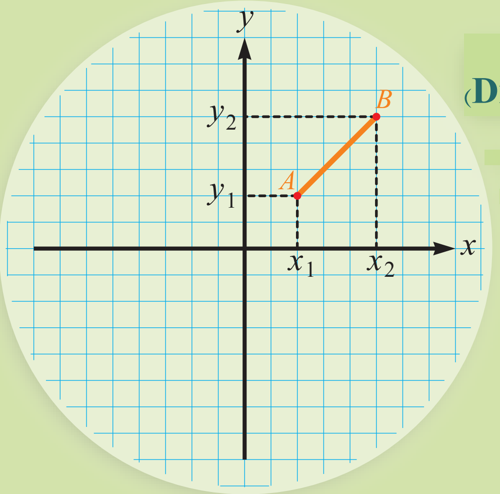
تحلیلي هندسه

تحلیلي هندسه

(Analytic Geometry)

د الجبر ا و هندسې تر منځ اړیکې، له تحلیلي هندسې څخه عبارت دی چې د الجبري معادلو او هندسي شکلونو په مرسته تر بحث لاندې نیول کېږي، فرانسوي ریاضي پوه دیکارت، د لومړي ځل لپاره، د ټاکلو هندسي اشکالو او الجبري معادلو ترمنځ، اړیکه و څېړله، ویې ویل: چې ځینې الجبري معادلې، یو ټاکلی هندسي شکل لري. څرنګه چې د هندسې د علم د بنسټ ټکی او د الجبري معادلو بنسټ عدد جوړوې، له لدې کبله، لومړی د ټکي او عدد ترمنځ اړیکې تر څېړنې لاندې نیسو، دیکارت د عدد او ټکي ترمنځ د اړیکو د څېړنې لپاره، د قایم مختصاتو د محورونو داسې یو سیستم راوپېژاند چې تراوسه د دیکارت په نامه یادیږي.





د دوو ټکو ترمنځ واټن
(Distance between twoPoint)

د $A(x_1,y_1)$ او $B(x_2,y_2)$ دوه ټکي د وضعیه کمیاتو په سیستم کې، د AB یو قطعه خط ټاکي. ستاسې په اند، څرنګه کولای شوچې، د A او B ټکو ترمنځ واټن وشمېرو؟

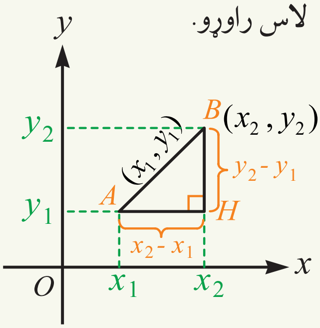
فعالیت

- د $A(3,5)$ او $B(5,4)$ ټکي، د وضعیه کمیاتو په سیستم کې وښایاست.
- د AB کرښه رسم کړئ.
- د A او B ټکو ترمنځ واټن وشمېرئ؟

له پورتني فعالیت څخه کولای شو، په عمومي ډول، د $A(x_1,y_1)$ او $B(x_2,y_2)$ دوو ټکو ترمنځ واټن په لاندې ډول په لاس راوړو.

په لاندې شکل کې $\overset{\Delta}{AHB}$ مثلث یوقایم الزاویه مثلث دی.

د فیثاغورث د قضیې په مرسته کولای شو، د A او B ټکو ترمنځ واټن په لاندې ډول په لاس راوړو.



د فیثاغورث د قضیې .... $\overline{AB}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{BH}^2$

$$\left.\begin{array}{l}\overline{AH} = x_2 - x_1\\ \overline{BH} = y_2 - y_1\end{array}\right\} \Rightarrow \overline{AB}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

لومړی مثال: د $A(1,7)$ او $B(5,4)$ ټکو ترمنځ واټن پیدا کړئ.

حل: د دوو ټکو د واټن له فورمول څخه په ګټې اخیستنې سره لیکلای شو، چې:

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$\overline{AB}=\sqrt{(5-1)^2+(4-7)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}$$

$$\overline{AB}=5\ unit$$

دویم مثال: د $A(3,4)$ ټکي واټن له مبدأ څخه حساب کړئ.

حل: پوهېږوچې د مبدا مختصات $O(0,0)$ دي، نو د دوو ټکو تر منځ د واټن د فورمول څخه په لاس راځي: $\overline{0A}=\sqrt{x^2+y^2}$

$$\overline{OA}=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}\Rightarrow\overline{OA}=5$$

د $A(x_1,y_1)$ او $B(x_2,y_2)$ واټن عبارت دی، له: $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

د $P(x,y)$ یو اختیاري ټکی واټن، د قایمو کمیاتو له مبدأ څخه عبارت دی، له:

$$\overline{OA}=\sqrt{x^2+y^2}$$

پوښتنې

1- د $A(0,3)$ او $B(2,0)$ ټکو ترمنځ واټن پیداکړئ.

2- که $A(4,6)$، $B(-2,4)$ او $C(-8,2)$ د یوه مثلث دراسونو مختصات وي، د مثلث ډول وټاکئ.

3- د K عددي قیمت داسې وټاکئ، هغه ټوټه کرښه، چې له $A(2,3)$ او $B(5K,6)$ ټکو څخه تېرېږي، اوږدوالی یې د $\overline{AB}$ پنځه برابره شي.

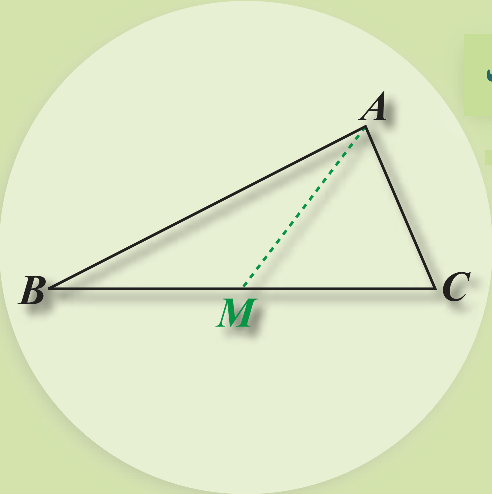
4- د $P(1,\sqrt{3})$ او $Q(-1,1+\sqrt{3})$ ترمنځ واټن پیداکړئ.

5- که $A(-1,4)$, $B(-3,-7)$ او $C(1,9)$ د یوه مثلث د رأسونومختصات وي، د مثلث محیط حساب کړئ.

6- د هغه مثلث مساحت پیداکړئ چې رأسونه یې، د $A(2,0)$، $B(6,2)$ او $C(1,2)$ په ټکوپراته وي.

7- که $A(10,5)$، $B(3,2)$ او $C(6,-5)$ د یوه مثلث د څوکو(رأسونه) مختصات وي، د مثلث ډول وټاکئ.

د یوه قطعه خط د منځني ټکي مختصات

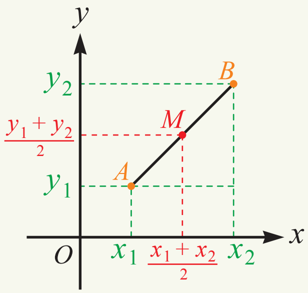


د $\overset{\Delta}{ABC}$ په مثلث کې د $\overline{AM}$ قطعه خط د مثلث میانــه ده، د میانــې ځانګړتیا بیان کړئ.

فعالیت

- د $D(2,0)$ او $E(6,0)$ ټکي، د وضیعه کمیاتو په سیستم کې وټاکئ.
- که چیرې د C ټکی، د $\overline{DE}$ قطعه خط منځنی ټکی وي، د هغې مختصات ولیکئ.
- د C ټکي مختصات د D او E ټکو له مختصاتوسره څه اړیکه لري؟
- د $P(0,1)$ او $Q(0,4)$ ټکي د وضیعه کمیاتو په سیستم کې وټاکئ.
- که چیرې د R ټکی، د $\overline{PQ}$ ټوټه کرښې منځنی ټکی وي، د هغې مختصات په لاس راوړئ.
- د R ټکي مختصات، د P او Q ټکو له مختصاتوسره څه اړیکه لري؟

د پورتني فعالیت پایله کولای شوچې په بشپړډول داسې بیان کړو: که $A(x_1,0)$ او $B(x_2,0)$ دوه ټکــو د x پــه محوررو پراته وي، نو د M ټکي مختصات چې د $\overline{AB}$ ټوټه کرښــې منځنی ټکی دی داسې په لاس راځي: $M(\frac{x_1+x_2}{2},0)$

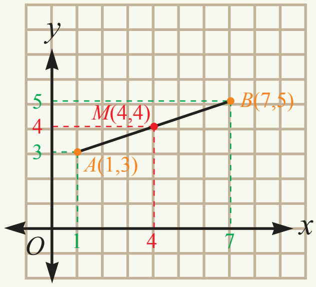


که $P(0,y_1)$ او $Q(0,y_2)$ دوه ټکي، د y په محور پراته وي، د M د ټکي مختصات چې د $\overline{PQ}$ ټوټه کرښې منځنی ټکی دی داسې په لاس راورو: $M(0,\frac{y_1+y_2}{2})$

په بشپړ ډول $A(x_1,y_1)$، $B(x_2,y_2)$ د وضیعه کمیاتو په سیستم کې دوه ټکي، او M د $\overline{AB}$ کرښې منځنی ټکی وي، نو د M ټکي مختصات داسې په لاس راځي: $M(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2})$

لومړی مثال: که چېرې $A(1,3)$ او $B(7,5)$ د $\overline{AB}$ ټوټه کرښې د پیل او پای مختصات وي، د ټوټه کرښې د منځنۍ ټکي مختصات په لاس راوړئ؟

حل: د یوې ټوټه کرښې د منځنۍ ټکي له مختصاتو څخه په ګټه اخیستنې سره لیکلای شو چې:



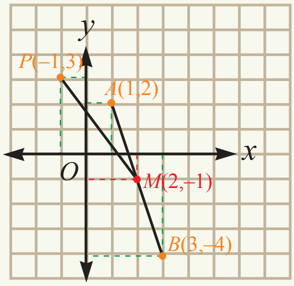
$$M(\frac{x_1+x_2}{2} \;,\; \frac{y_1+y_2}{2})$$

$$M(\frac{1+7}{2} \;,\; \frac{3+5}{2})$$

$$M(4,4)$$

دویم مثال: د $P(-1,3)$ ټکي واټن، د هغې مستقیمې کرښې له منځنۍ ټکي څخه پیداکړئ چې د $A(1,2)$ او $B(3,-4)$ ټکو څخه تېرشي.

حل: د AB د مستقیمې کرښې، له منځني ټکي څخه د P ټکي د واټن د پیدا کولو لپاره لومړی د AB منځني ټکي مختصات، په لاس راوړو، نولیکلای شو چې:



$$M_{\overline{AB}} = (\frac{x_1+x_2}{2} \;,\; \frac{y_1+y_2}{2})$$

$$= (\frac{1+3}{2}, \frac{2-4}{2}) = (2,-1) \Rightarrow M_{\overline{AB}} = (2,-1)$$

$$\overline{PM} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(2+1)^2+(-1-3)^2}$$

$$\overline{PM} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25}$$

$$\overline{PM} = 5 \text{ unit}$$

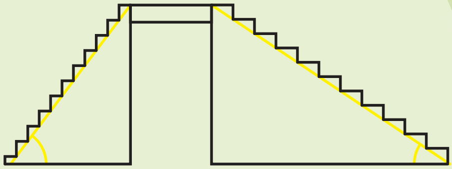
پوښتنې

1- د یوه مثلث درې رأسونه $A(5,-2)$، $B(3,-1)$ او $C(1,5)$ راکړل شوي دي، د $\overline{AM}$ د میانې اوږدوالی پیداکړئ.

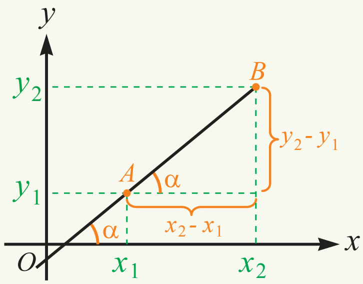
2 - که چېرې $A(2,4)$، $B(5,9)$، $C(14,9)$ او $D(11,4)$ ټکي د یوه متوازي الاضلاع رأسونه وي، د متوازي الاضلاع د قطرونو د تقاطع د ټکو مختصات پیداکړئ.

3 - که چېرې $A(-1,4)$، $B(-3,-7)$ او $C(1,9)$ د یوه مثلث رأسونه وي، نو د هغه د میانې یا منځنۍ کرښې اوږدوالی پیدا کړئ چې د BC په ضلع رسمیږي.

د مستقیمي کرښې میل



شــکل ته وګورئ، په کومه زینه، په آســانی سره ختلی شئ، ولې؟ دلیل یې بیان کړئ.



که $A(x_1, y_1)$ او $B(x_2 y_2)$ د $\overline{AB}$ مستقیمي کرښې دوه اختیــاري ټکــي وي، د $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ نســبت تــه د مســتقیي کرښــې میــل وایي او په لانــدې ډول یې لیکي: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

لومړی مثال: د هغې مستقیمي کرښې میل پیداکړئ چې د $A(3,5)$ او $B(4,6)$ ټکو څخه تېرشي.

حل: پوهېږو چې د مستقیمي کرښې میل د $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ اړیکې څخه لاسته راځي، نو لرو چې:

$$m_{\overline{AB}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-5}{4-3} = 1$$

دویم مثال: هغه مستقیم چې د $A(2,5)$ او $B(4,k)$ ټکو څخه تېرېږي، د k قیمت په هغه کې داسې وټاکئ چې د مستقیمي کرښې میل ۳ وي.

حل: د k قیمت د لاسته راوړلو لپاره ددې رابطې $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ څخه په لاندې ډول ګټه اخلو:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$3 = \frac{k-5}{4-2}$$

$$3 = \frac{K-5}{2}$$

$$K - 5 = 6$$

$$K = 11$$

دریم مثال: د هغې مستقیمې کرښې میل پیدا کړئ چې د $P(2,3)$ ټکي او د وضیعه کمیاتو له مبدأ څخه تېرېږي.

حل: څرنګه چې مستقیمه کرښه د وضیعه کمیاتو له مبدأ څخه تېرېږي، نود مبدأ مختصات $O(0,0)$ دی او میل یې په لاندې ډول په لاس راورو:

$$m_{\overline{PO}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3}{2}$$

$$m_{\overline{PO}} = 1.5$$

فعالیت

- د $A(2,3)$ او $B(4,6)$ ټکي د وضیعه کمیاتو په سیستم کې وښیئ.
- هغه مستقیم چې د A او B ټکوڅخه تېرېږي، رسم کړئ او په Δ_1 سره یې وښیئ؟
- د Δ_1 مستقیم میل په لاس راوړئ؟
- د Δ_1 مستقیم د x محور له مثبت جهت سره څه ډول زاویه جوړوي.
- د $M(1,5)$ او $N(4,2)$ ټکي په همغه وضیعه کمیاتوکې په بل رنګ وټاکئ.
- هغه مستقیم چې د M او N ټکوڅخه تېرېږي، هغه ته Δ_2 ووایئ.
- د Δ_2 مستقیم میل په لاس راوړئ؟
- د Δ_2 مستقیم د x محور د مثبت جهت سره څه ډول زاویه جوړوي؟
- د جوړ شویو زاویو او کرښوترمنځ، څه ډول اړیکه شته؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایلې په لاس راځي.

د هرې مستقیمې کرښې میل په هغه زاویې پورې اړه لري چې مستقیمه کرښه یې، د x د محور له مثبت لوري سره جوړوي.

که یوه مستقیمه کرښه، د x محور له مثبت جهت سره حاده زاویه جوړه کړي، میل یې یومثبت عدد دی.

که یوه مستقیمه کرښه، د x محور له مثبت جهت سره، منفرجه زاویه جوړه کړي، میل یې یو منفي عدد دی.

پوښتنې

1 - د هغې مستقیمې کرښې میل په لاس راوړئ چې د $A(1,1)$ او $B(-1,-1)$ ټکوڅخه تېرشي.

2 - هغه مستقیم چې د $A(-2,2\sqrt{3})$ او $B(1,a)$ ټکوڅخه تېرېږي، د a عددي قیمت داسې و ټاکئ، چې د مستقیم میل $\sqrt{3}$ وي.

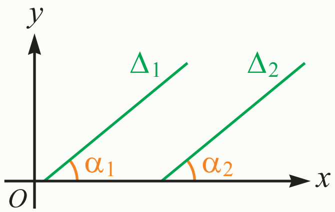
3 - که چېرې $B(3,-1), A(5,-2)$ او $C(1,5)$ ټکي، د یوه مثلث رأسونه وي، د نوموړي مثلث د $\overline{BC}$ ضلعې د میانې میل پیدا کړئ.

د موازي کرښو میل



په ورکړل شوي شکل کې، زینه په پام کې ونیسئ، د هغې د بازوګانو تر منځ څه ډول اړیکه شتون لري؟

فعالیت



- د راکړل شویو وضیعه کمیاتو په سیستم کې د Δ_1 او Δ_2 موازي کرښې له یوې بلې سره داسې رسم کړئ چې د x محور له مثبت جهت سره حاده زاویې جوړې کړي.
- د Δ_1 او Δ_2 کرښو میلونه حساب او له یو بل سره یې پرتله کړئ، کرښې له یو بل سره څه اړیکې لري؟
- که چېرې د Δ_1 مستقیم د x محور له مثبت جهت سره د α_1 زاویه د Δ_2 مستقیم د x محور له مثبت جهت سره د α_2 زاویه جوړه کړي، نو α_1 او α_2 یو له بل سره څه اړیکه لري؟

په عمومي ډول د پورتني فعالیت پایله، په لاندې ډول بیانوو:
موازي کرښې، د مساوي میلونو لرونکې دي.
که چېرې دوه مستقیمې کرښې مساوي میلونه ولري، په پایله کې هغه زاویې چې د x محور له مثبت جهت سره یې جوړوي، یو له بل سره مساوي دي؟

مثال: که چېرې د Δ_1 د مستقیم، د $A(2,5)$ او $B(-6,-11)$ ټکو او د Δ_2 مستقیم، د $C(-4,-6)$ او $D(3,8)$ ټکو څخه تېرشي، د Δ_1 او Δ_2 کرښې یوه له بلې سره څه اړیکه لري؟

$$\left.\begin{array}{l} m_{\overline{AB}} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ m_{\Delta_1} = \dfrac{-11-(5)}{-6-2} = \dfrac{-16}{-8} = 2 \Rightarrow m_{\Delta_1} = 2 \\ m_{\Delta_2} = \dfrac{8+6}{3+4} = \dfrac{14}{7} = 2 \Rightarrow m_{\Delta_2} = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow m_{\Delta_1} = m_{\Delta_2} \Rightarrow \Delta_1 \parallel \Delta_2$$

خرنګه چې د Δ_1 او Δ_2 میلونه سره مساوي دي، نو نوموړې کرښې یوه له بلې سره موازي دي.

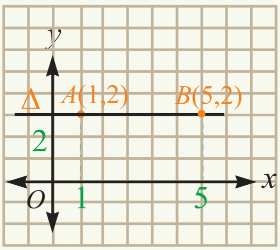
فعالیت

- د $A(1,2)$ او $B(5,2)$ ټکي د وضیعه کمیاتو په مستوي کې وټاکئ.
- هغه مستقیمه کرښه چې له A او B ټکوځخه تېرېږي، رسم کړئ او په Δ یې ونوموئ.
- د Δ مستقیم د x محور له مثبت جهت سره، څه ډول زاویه جوړوي؟
- د Δ مستقیم میل حساب کړئ.

د پورتني فعالیت پایله په لاندې ډول بیانوو:

که چېرې A او B دوه اختیاري ټکي او مساوي ترتیبونه ولري، لکه: $B(x_2,a), A(x_1,a)$

هغه کرښې چې د A او B ټکوځخه تېرېږي، د x له محورسره موازي دي. او میل یې، له صفرسره مساوي دی. یعني: $m = \dfrac{a-a}{x_2 - x_1} = 0$



فعالیت

- د $M(3,2)$ او $N(3,5)$ ټکي، د وضیعه کمیاتو په مستوي کې وټاکئ.
- هغه مستقیمه کرښه چې له M او N ټکو څخه تیریږي، رسم کړئ او په Δ یې ونوموئ.
- د Δ مستقیمه کرښه، د x له محور سره څه ډول زاویه جوړ وي، د Δ مستقیمې کرښې د میل په اړه څه ویلای شئ؟

له پورتني فعالیت څخه دې پایلې ته رسیږو، هغه مستقیمه کرښه چې د x له محورسره قایمه زاویه جوړه کړي، نشو کولای د هغې میل حساب کړو، په دې حالت کې ویل کیږي چې د Δ مستقیم خط ټاکلی میل نه لري.

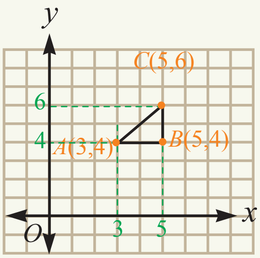
مثال: که چېرې د $A(3,4)$ ، $B(5,4)$ او $C(5,6)$ ټکي، د یوه مثلث رأسونه وي، د مثلث ډول وټاکئ اوهغه د وضیعه کمیاتو په سیستم کې رسم کړئ؟

حل: څرنګه چې، د AB مستقیمه کرښه د x له محور سره موازي ده، نو میل یې صفر دی.

$$m_{\overline{AB}} = \frac{4-4}{5-3} = \frac{0}{2} = 0$$

په همدې ډول، د BC مستقیمه کرښه د y له محور سره موازي ده، نومیل یې نامعین دی (نه دی تعریف شوی).

$$m_{\overline{BC}} = \frac{6-4}{5-5} = \frac{2}{0} = \infty$$



$$\overline{AB}^2 = (5-3)^2 + (4-4)^2 = 4$$
$$\overline{BC}^2 = (5-5)^2 + (6-4)^2 = 4$$
$$\overline{AC}^2 = (5-3)^2 + (6-4)^2 = 8$$
$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$$

په پایله کې:

څرنګه چې د فیثاغورث قضیه پکې تطبیق کیږي، نو د $\overline{AB}$ مستقیمه کرښه، د $\overline{AC}$ په مستقیمې کرښې عمود ده، نو د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث قایمه الزاویه دی.

هغه مستقیمه کرښه چې د x له محور سره موازي او یا د y په محور عمود وي، میل یې صفردی.

هغه مستقیمه کرښه چې د x په محور عمود یا د y له محور سره موازي وي، میل یې نه دی تعریف شوی.(معین عدد نه دی)

پوښتنې

1- که د $A(3,0)$ ، $B(0,5)$ ، $C(-3,0)$ او $D(0,-5)$ د یوې څلورضلعي راسونه وي:

الف: د څلورضلعي مخامخ ضلعې یوه له بلې سره څه اړیکې لري؟

ب: د قطرونو میلونه پیدا کړئ؟

۲- $A(3,4)$, $B(-3,4)$, $C(3,-4)$ او $D(-3,-4)$ ټکی په پام کی ونیسئ.

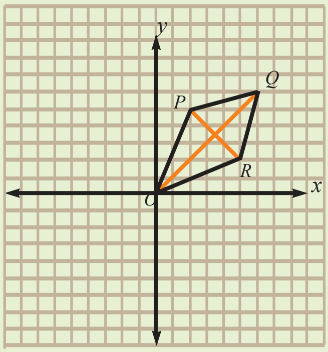
الف: هغه مستقیمه کرښه چې د A او B له ټکو څخه تیریږي، له هغې کرښې سره چې د C او D ټکوڅخه تیریږي، څه اړیکې لري؟

ب: هغه مستقیمه کرښه چې د A او B ټکو اوهغه کرښه چې د C او D ټکو څخه تیریږي څه ا ړیکه لري؟

ج: د $ABCD$ څلورضلعي، څه ډول څلور ضلعي ده؟

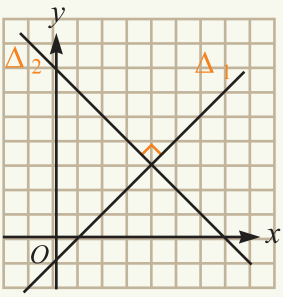
د: د قطرونو میل یې پیدا کړئ.

د یو پر بل باندې د عمود مستقیمو کرښو میل



$OPQR$ څلورضلعي یولوزي دی.
کولای شئ، د لوزي ځانګړتیا، د
هغې د رأسونو د مختصاتو په مرسته
بیان کړئ؟

تعریف



د Δ_1 او Δ_2 دوه مستقیمې کرښې چې میلونه یې m_1 او m_2 دي، هغه وخت یو پربل عمود دي چې لاندې رابطه د هغوی ترمنځ موجوده وي. $m_1 \cdot m_2 = -1$

لومړی مثال: هغه مستقیمه کرښه چې د $A(7,5)$ او $B(1,1)$ او هغه چې د $C(0,5)$ او $D(2,2)$ ټکو څخه تیریږي، له یوبل سره څه اړیکه لري؟

حل:

$$m_{\overline{AB}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-5}{1-7} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}$$

$$m_{\overline{CD}} = \frac{2-5}{2-0} = \frac{-3}{2}$$

$$m_{\overline{AB}} \cdot m_{\overline{CD}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{-3}{2} = -1$$

په پایله کې، د $\overline{AB}$ او $\overline{CD}$ مستقیمې کرښې، یو پربل عمود دي.

فعالیت

- د $C(4,4), B(1,3), 0(0,0)$ او $D(3,1)$ ټکې، د وضعیه کمیاتو په سیستم کې وښایاست.
- د $OBCD$ شکل رسم کړئ.
- د $\overline{OB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ او $\overline{DO}$ ضلعو اوږدوالی پیدا کړئ.

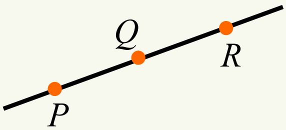
• د $\overline{\boxed{OBCD}}$ خلورضلعي، څه ډول خلورضلعي ده؟

• وښيئ چې د $\overline{OC}$ او $\overline{BC}$ قطرونه، يو پر بل عمود دي؟

پوهېږو چې په يوه مستوي کې، له دوو ټکوڅخه، يوازې يو مستقيم تېرېږي، په کوم حالت کې له درېو ټکو څخه يومستقيم خط تېرېدلای شي؟

تعریف

د Q,P او R ټکي هغه وخت پر يوه مستقيم پراته دي چې د $\overline{PQ}$ ميل د $\overline{QR}$ له ميل سره مساوي وي.



دويم مثال: د $B(2,3), A(0,-1)$ او $C(-1,-3)$ درې ټکي په پام کې ونيسئ، دا وښيئ چې دا درې واړه ټکي په يوه مستقيمه کرښه پراته دي؟

حل: د AB ميل عبارت دی له:

$$m_{\overline{AB}} = \frac{3+1}{2-0} = \frac{4}{2} = 2$$

$$m_{\overline{AC}} = \frac{-3-(-1)}{-1-0} = \frac{-2}{-1} = 2$$

د AC ميل عبارت دی، له: $m_{\overline{BC}} = \frac{-3-3}{-1-2} = \frac{-6}{-3} = 2$

څرنګه چې د $\overline{AB}, \overline{AC}$ او $\overline{BC}$ کرښو ميلونه سره مساوي دي، نو په پايله کې د B, A او C ټکي په يوه مستقيمه کرښه پراته دي.

• که چېرې د دوو کرښو د ميلونو د ضرب حاصل (-1) وي، نو کرښې يو پر بل عمودي دي.

• درې ټکي، هغه وخت په يوه کرښه پراته وي چې د ټوټه کرښو ميلونه سره مساوي وي.

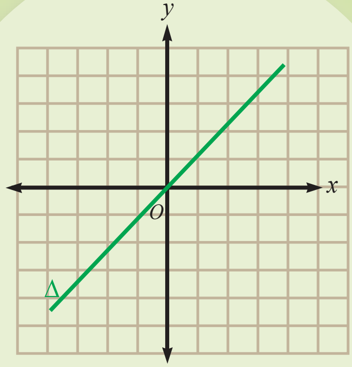
پوښتني

1–که د $A(6,1)$ ، $B(8,3)$ او $C(6,5)$ ټکي، د يوه مثلث رأسونه وي، دا وښيئ چې نوموړی مثلث قايم الزاويه دی او که نه؟

2 - هغه ټوټه کرښې چې د $(7,5)$ او $(1,1)$ ټکو څخه تېرېږي له هغې ټوټه کرښې سره چې د $(0,5)$ او $(2,2)$ ټکوڅخه تېرېږي، اړيکې يې يو له بل سره وڅېړئ.

3 - يوه کرښه چې د $(2,4)$ او $(7,5)$ ټکو او بله د $(1,-4)$ او $(-3,-5)$ ټکوڅخه تېرېږي، د دواړو کرښوحالت يو له بل سره بيان کړئ.

د مستقیمې کرښې معادله



په مخامخ شکل کې، د مستقیمې کرښې پرمخ څو ټکي وټاکئ، د کرښې پرمخ د ټاکل شویو ټکو د واټن اوترتیب ترمنځ کومه اړیکه وینئ؟

فعالیت

- د $A(1,-1)$, $B(-2,2)$, $C(4,-4)$ او $D(-3,3)$ ټکي د وضیعه کمیاتو په سیستم کې وټاکئ.
- ددې ټکو له ترلوڅخه کوم شکل لاسته راځي؟
- د $A(1,1)$ او $B(0,0)$ ټکي د شکل پرمخ پراته دي اوکه نه؟ ولې؟

د پورتني فعالیت پایله، په عمومي ډول داسې بیانوو:

د $y = x$ او $y = -x$ رابطې چې د یوې کرښې پرمخ د ټکو د واټن اوترتیب ترمنځ اړیکه رانښیي، د مستقیمې کرښې معادله بلل کیږي.

پوهیږو چې د هرو دوو ټکو څخه چې په یوه مستوي کې پرتې وي، یوازې او یوازې یوه مستقیمه کرښه تیریږي. اوس غواړو چې د هغې مستقیمې کرښې معادله پیدا کړو چې له دوو اختیاري ټکو څخه تیریږي.

فعالیت

- د $A(1,3)$ او $B(3,5)$ دوه ټکي، د وضیعه کمیاتو په سیستم کې وټاکئ.
- هغه مستقیمه کرښه رسم کړئ چې له A او B ټکوڅخه تیره شي.

ددې لپاره چې د $M(x, y)$ اختیاري ټکی د $\overline{AB}$ کرښې پر مخ پروت وي، کوم شرط لازمي دی؟
د $\overline{AM}$ او $\overline{AB}$ ټوټه کرښو میلونو له مساویتوب څخه کومه اړیکه لاسته راځي؟

د پورتني فعالیت پایله کولای شو په عمومي ډول داسې بیان کړو.

د هغې کرښې معادله چې د $A(x_1, y_1)$ او $B(x_2, y_2)$ له دوو ټکو څخه تېره شي، داسې په لاس راځي:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

لومړی مثال: د هغې مستقیمې کرښې معادله ولیکئ چې د $A(3,4)$ او $B(2,-1)$ له ټکو څخه تېره شي.

حل: د هغې مستقیمې کرښې د معادلې په مرسته چې دوه ټکي یې معلوم وي، لیکلای شو چې:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$\frac{y-4}{x-3}=\frac{-1-4}{2-3}\Rightarrow\frac{y-4}{x-3}=\frac{-5}{-1}=5$$

$$y-4=5(x-3)$$

$$y=5x-15+4=5x-11$$

دویم مثال: د هغې مستقیمې کرښې معادله ولیکئ چې د x محور په واټن، د $x=-3$ ټکي کې او د y محور په ترتیب د $y=4$ ټکي کې قطع کړي؟

حل: څرنګه چې، مستقیمه کرښه د x محور په $x=-3$ ټکي کې قطع کوي، نو د مختصاتو په سیستم کې، ددې ټکي د تقاطع مختصات $(-3,0)$ دی. په همدې ډول، د y له محور سره د تقاطع د ټکو د مختصات د وضعیه کمیاتو په سیستم کې $(0,4)$ دی، اوس د یوه مستقیم د دوو ټکو پېژندلو په مرسته کولای شو، د مستقیمې کرښې معادله داسې ولیکو:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\Rightarrow\frac{y-0}{x-(-3)}=\frac{4-0}{0-(-3)}$$

$$\frac{y}{x+3}=\frac{4}{3}\Rightarrow 3y=4(x+3)$$

$$3y-4x=12$$

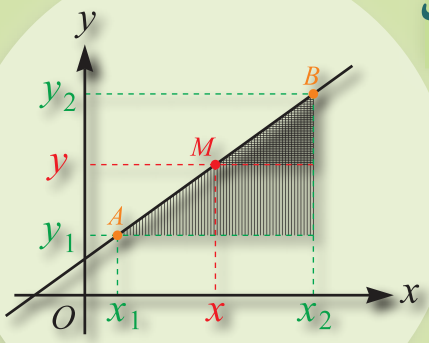
پوښتنې

1- د هغې مستقیمې کرښې معادله ولیکئ چې د $A(2,-1)$ او $B(3,4)$ له ټکو څخه تېره شي؟

2- د هغه مثلث د $\overline{AM}$ میانې معادله ولیکئ چې رأسونه یې $A(1,3), B(-1,4)$ او $C(5,6)$ وي؟

3- د هغې مستقیمې کرښې معادله پیدا کړئ چې د x محور په $A(3,0)$ او د y محور په $B(0,-2)$ ټکي کې قطع کړي؟

د هغې مستقیمې کرښې معادله چې میل او یو ټکی یې معلوم وي



په مخامخ شکل کې د $\overline{AB}$ میل، د $\overline{MA}$ له میل سره څه اړیکه لري؟
بله هره ټوټه کرښه چې ددې ټوټه کرښې پرمخ وټاکو، د $\overline{AB}$ له میل سره برابر میل لري، ولې؟

پوهیږو چې د هغې کرښې معادله چې د $A(x_1, y_1)$ او $B(x_2, y_2)$ دوه ټکي ښکاره کوي عبارت ده، له:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

یا

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

څرنگه چې $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ د مستقیمې کرښې میل راښیي، نو پورتنی معادله لاندې شکل غوره کوي.

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

وروستنی معادله، د هغې کرښــې معادله ده چې میل یــې (m) او د $A(x_1, y_1)$ له نقطې څخه تیریږي.

لومړی مثال: د هغې مستقیمې کرښې معادله ولیکئ چې له $(2,3)$ ټکي څخه تیره او میل یې $\frac{1}{2}$ وي.

حل: څرنگه چې د مستقیمې کرښې میل او یو ټکی راکړل شوي دي، نو د $y-b=m(x-a)$ معادلې څخه لیکلای شو:

$$y-3=\frac{1}{2}(x-2)$$

$$2(y-3)=(x-2)$$

$$2y-6=x-2$$

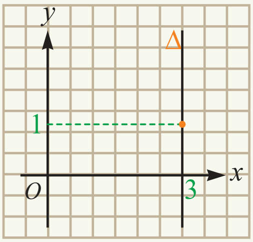
$$2y-x=4 \Rightarrow y=\frac{1}{2}x+2$$

دویم مثال: هغه مستقيمه کرښه چې د $(3,1)$ ټکي څخه تېره او د x له محور سره موازي وي، وليکئ؟

حل: څرنګه چې مستقيمه کرښه د x له محور سره موازي ده، نوميل يې صفر دی. په پايله کې يې معادله په لاندې ډول ده .

$$y-b=m(x-a)$$
$$y-1=0\ (x-3)$$
$$y-1=0 \Rightarrow y=1$$

دریم مثال: د هغې مستقيمې کرښې معادله وليکئ چې له $(3,1)$ ټکي څخه تېره او د y له محور سره موازي وي؟



حل: څرنګه چې مستقيم د y له محور سره موازي دی، نوميل يې نه دی تعريف شوی (معين ميل نه لري)، ځکه پوهېږو چې، ددې کرښې پرمخ د هر ټکي واټن د $(3,1)$ ټکي سره مساوي دی چې معادله يې په دې ډول $x=3$ ده.

په عمومي ډول، هغه کرښه چې له (a,b) ټکي څخه تېره او د x له محور سره موازي وي، عبارت له $y=b$ سره ده.

هغه کرښه چې د (a,b) ټکي څخه تېرېږي او د y له محور سره موازي وي، عبارت له $x=1$ سره ده.

څلورم مثال: د Δ توټه کرښې د عمودي ناصف معادله پيدا کړئ چې د $A(2,-4)$ او $B(-2,4)$ ټکو څخه تېره شي.

حل: د عمودي ناصف د معادلې د پيدا کولو لپاره لومړی د $\overline{AB}$ توټه کرښې ميل په لاس راوړو او بيا د هغې د منځ د $\overline{AB}$ د منځنۍ ټکي مختصات په لاس راوړو.

$$m_{\overline{AB}}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{4+4}{-2-2}=-2 \quad \Rightarrow \quad m_{\Delta}=-\frac{1}{m_{\overline{AB}}}=\frac{1}{2}$$

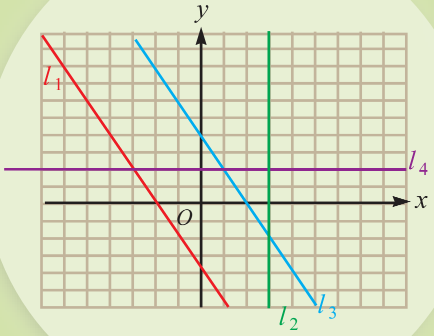
$$(x,y)_{\overline{AB}}=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)=\left(\frac{0}{2},\frac{0}{2}\right)=(0,0)$$

$$y-y_1=m(x-x_1) \quad \Rightarrow \quad y-0=\frac{1}{2}(x-0) \Rightarrow y=\frac{1}{2}x$$

پوښتنې

1- د هغې مستيمې کرښې معادله پيدا کړئ چې ميل يې 4 او y محور د 3 په ټکي کې پرې کړي؟
2- د هغې مستقيمې کرښې معادله پيدا کړئ چې د $P(5,-4)$ ټکي څخه تېره او ميل يې 2- وي؟
3- د $3x+4y-7=0$ معادله کې، د مستقيم ميل او د y له محور سره يې د تقاطع ټکي پيدا کړئ؟

د مستقیمې کرښې عمومي معادله



د l_1 ، l_2 ، l_3 ، l_4 خلورکرښې، نسبت یوې بلې ته، کوم وضعیتونه لري؟

د یوې کرښې الجبري معادله د هغه ټکي د مختصاتو اړیکه چې په مستقیمه کرښه پروت دی راښیي، په عمومي ډول د یوې مستقیمې کرښې معادله په لاندې ډول بیانوو:
په معیاري یا ستنډرډ ډول، د یوې مستقیمې کرښې معادله په لاندې ډول ده.

$y=\frac{-a}{b}x-\frac{c}{b}$ یا $ax+by+c=0$ ، b, a او c حقیقي عددونه او $b\neq 0$ دی.

په پورتنۍ معادله کې $\frac{-a}{b}$ د کرښې میل او $\frac{-c}{b}$ د y له محور سره د تقاطع ټکی بلل کیږي،
نو ویلای شوچې د هرې کرښې معادله، په یوه مستوي کې په لاندې ډول ده:

$y=mx+h$ چې m د مستقیمې کرښې میل او h د y محور سره د تقاطع ټکي یا ترتیب دی
په عمومي ډول، هره خطي اړیکه، د x او y له جنسه چې په هغه کې د x او y توان یو وي، د مستقیمې کرښې معادله بلل کیږي.

فعالیت

- د $2x+3y-6=0$ او $y-x=2$ دوې مستقیمې کرښې، د وضیعه کمیاتو په مستوي کې رسم کړئ.
- د هریوه مستقیم میل پیدا کړئ.
- دا دوې کرښې یوه له بلې سره څه وضعیتونه لري؟

له پورتني فعالیت پایله په لاندې ډول بیانوو:
که د دوو کرښو میلونه سره مساوي نه وي، نوکرښو یوه بله پرې کړې ده.
په عمومي ډول، که د $a_1x+b_1y+c_1=0$ او $a_2x+b_2y+c_2=0$ دوې کرښې یوه بله قطع کړي. نو میلونه یې سره مساوي نه دي، له دې څخه داسې پایله په لاس راځي.

$$\frac{a_1}{b_1}\neq\frac{a_2}{b_2} \quad \text{یا} \quad \frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$$

فعاليت

- د $-3x+y-5=0$ او $6x-2y+1=0$ مستقيمي كرښې، د قايمو وضيعه كمياتو په مستوي كې رسم كړئ.
- ددې مستقيمي كرښې ميل په لاس راوړئ.
- دا دوې مستقيمي كرښې، نسبت يوه بلې ته څه حالت لري؟ ولې؟

په عمومي ډول، د $a_1x+b_1y+c_1=0$ او $a_2x+b_2y+c_2=0$ دوه مستقيمي كرښې، هغه وخت موازي دي چې ميلونه يې سره مساوي وي، له دې ځايه دا پايله په لاس راځي چې د هغوى د متحولينو د ضريبونو ترمنځ، لاندې اړيكه موجوده ده.

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}\Rightarrow\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$$

كه د متحولينو د ضريبونو ترمنځ $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_1}=\frac{c_1}{c_2}$ اړيكه وي، په دې حالت كې كرښې يو پر بل پرتې(منطبق) دي.

لومړى مثال: د $3x+4y=5$ او $4x-3y=-1$ د مستقيمو اړيكو، نظر يو بل ته بيان كړئ.

حل: د دوو كرښو د معادلاتو له ثابتوضريبونو څخه په ګټې اخيستنې سره لروچې:

$a_1=3$ $\quad b_1=4$ $\quad c_1=-5$

$a_2=4$ $\quad b_2=-3$ $\quad c_2=1$

1- ځرنګه چې $\frac{3}{4}\neq\frac{4}{-3}$ نو $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$ دى په دې حالت كې كرښې يوبل قطع.

2- ځرنګه چې، $\frac{3}{4}\times\frac{4}{-3}=-1$ نو $\frac{a_1}{a_2}\times\frac{b_1}{b_2}=-1$ دي، نو د كرښو د تقاطع په ټكي كې يو پر بل عمود دي.

دويم مثال: په لاندې معادلوكې د k عددي قيمت داسې وټاكئ چې مستقيمونه له يوبل سره عمودي وي، $2x-6y+3=0$ او $kx+3y-1=0$

حل: د عموديت شرط څيړو:

$$kx+3y-1=0\ ,2x-6y+3=0$$
$$a_1.a_2+b_1.b_2=0$$
$$2\cdot k+(-6)3=0\ \Rightarrow k=9$$

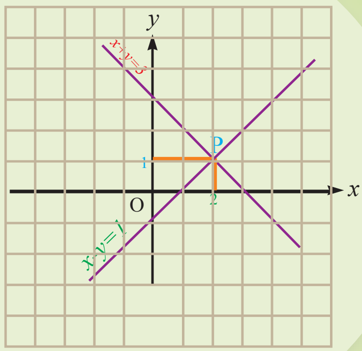
پوښتنې

1- د $4x+3y-1=0$ او $8x+6y+5=0$ كرښوحالت، يوبل ته بيان كړئ.

1 - د $8x-4y+10=0$ او $4x-2y+5=0$ كرښو حالت يو بل ته بيان كړئ.

3 - د $(k+1)x+ky=0$ او $2x-3y+5=0$ معادلوكې د k قيمت داسې وټاكئ چې كرښې يوه له بلې سره موازي وي.

د خطي معادلو سیستم
(System of liear equation)



شکل ته پام وکړئ، آیا د P ټکي مختصات، د کرښو په دواړو معادلو کې صدق کوي؟

فعالیت

- د $y = 4x - 2$ او $y = 3x + 5$ کرښو میلونه پیدا کړئ.
- دا کرښې نظر یوې بلې ته څه اړیکې لري؟ ولې؟
- پورتنی دواړه کرښې، د وضعیه کمیاتو په سیستم کې رسم کړئ؟ د رسم شویو کرښو تر منځ څه اړیکه لیدل کیږي؟

په پورتني فعالیت کې لیدل کیږي چې د هغو دوو کرښو میلونه مساوي نه وي، یو بل د P په ټکي کې قطع کوي.
څرنګه چې، تقاطع ټکی د دواړو کرښو په مخ پراته دي، نو د هغه ټکي مختصات، د کرښو په معادلو کې صدق کوي. که د تقاطع د ټکي مختصات، په P(x,y) وښیو، نو: $y = -3x + 5$ او $y = 4x - 2$ معادلو څخه لیکلای شو چې:

$$4x - 2 = -3x + 5$$
$$7x = 7$$
$$x = 1$$

د کرښو په معادلو کې، د x قیمت په وضع کولو سره د y قیمت په لاس راوړلای شو:

$$y = 4x - 2 \Rightarrow y = 4(1) - 2 \Rightarrow y = 2$$

نو د تقاطع ټکي مختصات عبارت دي له $P(1,2)$ په پایله کې ویلای شو چې $P(1,2)$

ټکی داسې ټکی دی چې په دواړو معادلو کې حقیقت لري چې د $\begin{cases} y=4x-2 \\ y=-3x+5 \end{cases}$ خطي معادلو د سیستم حل دی.

فعالیت

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \quad .... \quad I \end{cases}$$

- مخامخ، د خطي معادلو سیستم په پام کې ونیسئ.
- a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 او c_2 د څه په نامه یادېږي؟
- په پورتنیو معادلو کې x او y ته څه ویل کېږي؟
- آیا ددې دوو کرښو د تقاطع د ټکي، د مختصاتو د سیستم یو حل کېدای شي؟

د خطي سیستم د حل لپاره د (I) سیستم داسې لیکو چې په هغه حالت کې b_1 او b_2 د صفر خلاف وي.

$$\begin{cases} y=-\dfrac{a_1}{b_1}x+\dfrac{c_1}{b_1} \\ y=-\dfrac{a_2}{b_2}x+\dfrac{c_2}{b_2} \end{cases}$$

نو لاندې درې حالتونه لرو:

1- که چېرې، د دوو کرښو میلونه سره مساوي نه وي، نو دا کرښې یوه او بله، په یوه ټکي کې قطع کوي.

2- که چیرې د کرښو میلونه سره مساوي وي، خو د y محور یې د تقاطع ټکي سره مساوي نه وي، نو هغه وخت دا دوه کرښې سره موازي دي.

3- که چېرې د کرښومیلونه او د y محور سره، د تقاطع ټکي مساوي وي، نو بیا هغه دوه کرښې سره منطبق وي.

لومړی مثال: د لاندې خطي معادلو سیستم حل کړئ:

$$\begin{cases} x+y=7 \\ 2x+y=5 \end{cases}$$

حل: د دې سیستم د حل لپاره، نوموړی سیستم په دې ډول لیکو:

$$\begin{cases} y=7-x \quad \Rightarrow y=-x+7 \\ y=5-2x \Rightarrow y=-2x+5 \end{cases}$$

لیدل کېږي چې د پورتنیو کرښو د معادلو میلونه، 1- او 2- دي، څرنګه چې د دوو خطونو میلونه مساوي نه دي، نو کرښې یوه او بله په یوه ټکي کې قطع کوي چې د تقاطع د ټکي د مختصاتو د پیدا کولو لپاره په لاندې ډول عمل کوو:

$$-x+7=-2x+5$$
$$-x+2x=5-7 \qquad \Rightarrow x=-2$$

د کرښو په یوه معادله کې، د x پر ځای د 2- په وضع کولو سره لرو چې:

$$y=-x+7$$
$$y=-(-2)+7 \qquad \Rightarrow y=9$$

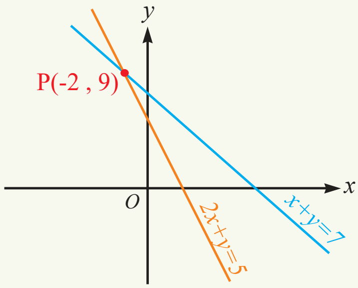
نو $(-2,9)$ د کرښو د معادلو د سیستم حل او د تقاطع ځای دی چې په شکل کې لیدل کېږي.

$x+y=7$

x	0	7
y	7	0

$2x+y=5$

x	0	$5/2$
y	5	0



دویم مثال: د لاندې خطي معادلو سیستم حل کړئ.

حل: لومړی معادلې په لاندې ډول لیکو:

$$\begin{cases} x+y=5 \\ 6y=-6x+12 \end{cases}$$

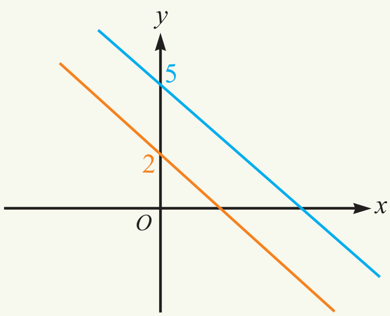
$$\begin{cases} y=-x+5 \\ y=-\frac{6}{6}x+\frac{12}{6} \end{cases}$$

$y=-x+5$

x	0	5
y	5	0

$y=-x+2$

x	0	2
y	2	0



څرنګه چې د دواړو کرښو میل 1- دی، په پایله کې کرښې په خپل منځ کې موازي دي او یوه بله نه قطع کوي، یعنې د موازي کرښو د معادلو سیستم حل نه لري.

دريم مثال: د لاندې خطي معادلو سيستم حل کړئ.

$$\begin{cases} x+y=7 \\ -28=-4x-4y \end{cases}$$

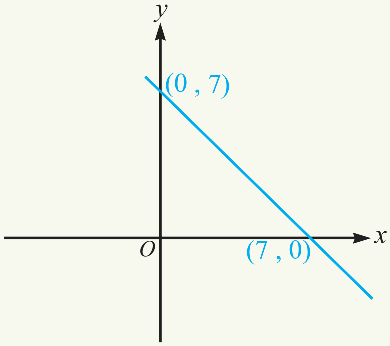
حل: لومړی د معادلاتو سيستم په لاندې ډول ليکو:

$$\begin{cases} y=-x+7 \\ y=\frac{-4}{4}x+\frac{28}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=-x+7 \\ y=-x+7 \end{cases}$$

x	0	7
y	7	0

x	0	7
y	7	0



ليدل کېږي چې د کرښو ميل او د y په محور د تقاطع ټکي سره برابر دي، نو دواړه کرښې سره منطبق دي، په دې حالت کې کرښې ډېر ګڼ ټکي لري، په پايله کې د خطي معادلو سيستم ډېر حلونه لري.

که a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 او c_2 حقيقي عددونه x او y مجهولونه وي، په دې حالت کې د خطي معادلو سيستم $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ دی.

- که چېرې کرښې، يوه او بله په يوه ټکي کې پرې کړي، معادلې يو حل لري.
- که چېرې کرښې يوه له بلې سره موازي وي، معادلې حل نه لري.
- که چېرې کرښې يو پر بل منطبق وي، معادلې يې ډېر حل لري.

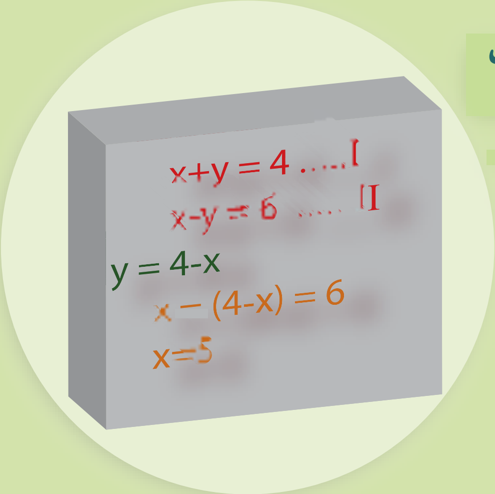
پوښتني

د لاندې خطي معادلو سيستمونه حل کړئ:

1) $\begin{cases} y=2x+5 \\ y=4x-3 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x-2=y \\ 3x-y=2 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y=-x+3 \\ y=2x-1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x-3y=5 \\ 3x-2y=5 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 4x-y=6 \\ 8x-2y=6 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3x-y=6 \\ -6x+2y=-10 \end{cases}$

د خطي معادلو سیستم حل، په تعویضي لاره



د خطي سیستم د معادلو حل ته پام وکړئ
د x مجهول عددي قیمت، ستاسو په نظر
څنګه په لاس راغلی دی؟

فعالیت

- د یوه مثلث د دوو زاویو مجموعه، 100° او د تفریق حاصل یې، 20° دی، الجبري معادلې یې ولیکئ.
- د معادلاتو دا سیستم څو مجهوله لري؟ د هر یوه عددي قیمت پیدا کړئ؟
- په لاس راغلي قیمتونه، د معادلاتو په سیستم کې وازمایئ؟

له پورتني فعالیت څخه د مسألې حل او د خطي معادلو سیستم د حل لاره، په لاندې ډول داسې لیکو:

حل: که چېرې د مثلث زاویې په $\hat{A}$ او $\hat{B}$ ونوموو پورتنی عبارت د الجبري معادلو په بڼه داسې لیکو:

$$\hat{A}+\hat{B}=100^{\circ} \quad ....I$$

$$\hat{A}-\hat{B}=20^{\circ} \quad ....II$$

او د $\hat{A}$ زاویې قیمت، د $\hat{B}$ زاویې له جنسه، له لومړۍ معادلې څخه په لاس راوړو $\hat{A}=100^{\circ}-\hat{B}$ دا قیمت په دویمه معادله کې د A په عوض وضع کووا و معادله حلوو:

$$100^{\circ}-\hat{B}-\hat{B}=20^{\circ} \Rightarrow -2\hat{B}=-80^{\circ} \Rightarrow \hat{B}=40^{\circ}$$

اوس د $\hat{B}$ قیمت، د خطي معادلاتو په سیستم کې وضع کوو چې د $\hat{A}$ قیمت په لاس راځي:

$$\hat{A}-\hat{B}=20^{\circ}$$

$$\hat{A}-40^{\circ}=20^{\circ} \Rightarrow \hat{A}=20^{\circ}+40^{\circ} \Rightarrow \hat{A}=60^{\circ}$$

دويم مثال: لاندې د دوه مجهوله معادلو سيستم حل کړئ:

$$\begin{cases}2x+3y=0\\3x+2y=10\end{cases}$$

حل: لومړی د يوه مجهول قيمت، د بل مجهول له جنسه، د يوې معادلې څخه په لاس راوړو او په بله معادله کې يې وضع کوو:

$$2x+3y=0 \quad \Rightarrow 2x=-3y \quad \Rightarrow x=-\frac{3}{2}y$$

$$3x+2y=10$$
$$3(-\frac{3}{2}y)+2y=10$$
$$-\frac{9}{2}y+2y=10$$
$$\frac{-9+4}{2}y=10$$
$$-5y=20 \quad \Rightarrow y=-4$$

$$x=-\frac{3}{2}y$$
$$x=-\frac{3}{2}(-4)$$
$$x=-3(-2)$$
$$x=6$$

د دوه مجهوله، لومړۍ درجو معادلو سيستم د حل لپاره، په لاندې ډول عمل کوو:

- د يوه مجهول قيمت، د بل مجهول له جنسه، د يوې معادلې څخه په لاس راوړو او هغه په بله معادله کې د هغه په عوض وضع کوو.
- په لاس راغلې يو مجهوله لومړۍ درجه معادله حلوو او د مجهول قيمت په لاس راوړو.
- دا په لاس راغلی مجهول قيمت، د سيستم په معادلو کې وضع او د بل مجهول قيمت، په لاس راوړو.
- په لاس راغلي قيمتونه، د سيستم په معادلو کې وضع کوو که سم له لاسه، په دواړو معادلو کې يې حقيقت ولري، د معادلې حل سم او پرته له هغه، د معادلې حل نه او سم نه دی.

پوښتني

د لاندې سيستمونو حل، په تعويضي طريقه په لاس راوړئ:

1) $\begin{cases}y=2x\\x+y=6\end{cases}$ 2) $\begin{cases}7x-2y=15\\6x-y=10\end{cases}$ 3) $\begin{cases}a+2b=2\\2a-3b=25\end{cases}$

4) $\begin{cases}\frac{2x-1}{3}+\frac{y+2}{4}=4\\\frac{x+3}{3}=\frac{x-y}{3}\end{cases}$ 5) $\begin{cases}\frac{5}{x}-\frac{3}{y}=1\\\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=7\end{cases}$ 6) $\begin{cases}\frac{2x}{3}+\frac{y}{5}=6\\\frac{x}{6}-\frac{y}{2}=-4\end{cases}$

د خطي معادلو د سیستم حل، د افنا په لاره طریقې

$$x + y = ?$$
$$\frac{1}{3}x + y = ?$$
$$x = ?$$
$$y = ?$$

حمیرا، زحل ته وویل: که ته خپلې پیسې ما ته راکړې، زه د 15 افغانیو شتنته کیږم، زحل حمیرا ته وویل: که ته د خپلو پیسو دریمه برخه ما ته راکړې، زه د 5 افغانیو شتنته کیږم، هره یوه څو افغانۍ لري؟

فعالیت

- د معادلو یو سیستم ولیکئ چې دوه معادلې او دوې مجهوله ولري؟
- نوموړی سیستم، د گراف په مرسته حل کړئ.
- نوموړې معادلې، په تعویضي طریقه حل کړئ.
- آیا بله طریقه شته، چې نوموړې معادلې پرې حل شي؟

یوه بله لاره چې د دوه مجهوله معادلو سیستم پرې حلولای شو، د افنا طریقه یا لاره ده چې په لاندې مثال کې یې څیړو.

مثال: د خطي معادلو دا سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} 7x + 5y = 41 \text{ .... I} \\ 5x - 2y = 7 \text{ .... II} \end{cases}$$

حل: لومړی معادلو ته داسې بدلون ورکوو چې که هغوی خوا په خوا سره جمع یا تفریق کړو، نو له مجهولونو څخه یو مجهول افنا یا له منځه لاړ شي، که د x مجهول وغواړو چې افنا یې کړو، د لومړی معادلې دواړه خواوې، د دویمې معادلې د x په ضریب یعني (5) کې ضربوو او د دویمې معادلې دواړه خواوې، د لومړی معادلې د x په ضریب یعني (7) کې ضربوو.

$$\begin{cases} 7x + 5y = 205 & \Rightarrow \quad 35x + 25y = 205 \\ 5x - 2y = 7 & \Rightarrow \quad 35x - 14y = 49 \end{cases}$$

په لاس راغلي معادلې چې په هغه کې د x ضریبونه مساوي دي، یو له بل څخه تفریقوو.

$$\begin{array}{r} 35x + 25y = \ 205 \\ 35x - \ 2y = \ 49 \\ - \quad + \quad - \\ \hline 39y = 156 \end{array} \quad \Rightarrow y = \frac{156}{39} \Rightarrow \ y = 4$$

د y په لاس راغلی قیمت، د سیستم په یو معادله کې وضع کوو، تر څو د بل مجهول قیمت په لاس راشي:

$$5x-2y=7$$
$$5x-2(4)=7 \Rightarrow 5x=15 \Rightarrow x=3$$

دویم مثال: د معادلو لاندې سیستم، د افنا په طریقه حل کړئ:

$$\begin{cases}3x+2y=4\\2x-3y=-1\end{cases}$$

حل: لومړی یو مجهول له منځه وړو، لکه: y، نو لومړی معادله، په 3- کې او دویمه معادله په 3- کې ضربوو، په لاس راغلې معادلې خوا په خوا سره جمع کوو:

$$\begin{aligned}3x+2y&=4 &\Rightarrow -9x-6y&=-12\\2x-3y&=-1 &\Rightarrow \underline{-4x\mp 6y}&=\mp 2\\ & & -13x+0&=-10\\ & & x&=\frac{10}{13}\end{aligned}$$

$$3\left(\frac{10}{13}\right)+2y=4 \Rightarrow \frac{30}{13}+2y=4$$
$$2y=4-\frac{30}{13} \Rightarrow 2y=\frac{52-30}{13}$$
$$2y=\frac{22}{13} \Rightarrow y=\frac{11}{13}$$

د دوه مجهوله معادلو سیستم د افنا په طریقه داسې حلوو:

- هر مجهول چې وغواړو، هغه افنا کړو، د هغې ضریبونه په پام کې نیسو. لومړی معادله د دویمې معادلې د افنا شوي مجهول په ضریب کې او دویمه معادله، د لومړۍ معادلې د افنا شوي مجهول په ضریب کې ضربوو.
- په لاس راغلې معادلې یوه له بلې څخه تفریق یا جمع کوو چې د یوه مجهول قیمت په لاس راځي، دا په لاس راغلی قیمت د سیستم په یوه معادله کې وضع کوو چې د بل مجهول قیمت په لاس راځي.

پوښتنې

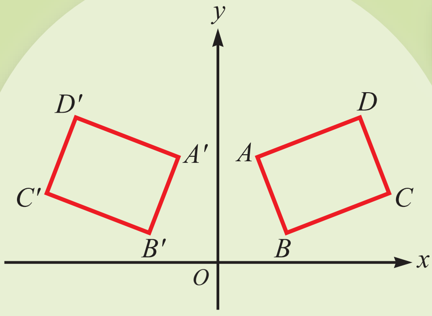
د معادلو لاندې سیستم د افنا په طریقه حل کړئ.

1) $\begin{cases}x+y=3\\2x-y=10\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x+y=-39\\x-y=9\end{cases}$ 3) $\begin{cases}x+2y=2\\x-4y=1\end{cases}$

4) $\begin{cases}\frac{2}{x}-\frac{5}{y}=5\\\frac{3}{x}+\frac{10}{y}=18\end{cases}$ 5) $\begin{cases}y+x-1=0\\2x+y-9=0\end{cases}$ 6) $\begin{cases}10x+3y=26\\8x+3y=18\end{cases}$

د ځای بدلون(تغییرمکان)

(Transformation)



$$(x , y) \xrightarrow{T} (-x , y)$$

په مخامخ شکل کې کوم توپیرونه اوڅه ډول یووالی وینئ؟

فعالیت

په مخامخ شکل کې کوم توپیرونه او څه ډول یووالی وینئ؟

- د $A(1,2)$، $B(-2,3)$ او $C(2,-4)$ ټکي د وضیعه کمیاتو په سیستم کې وټاکئ.
- ددې ټکو د x په مختصه باندې، ۲ واحده ور زیات کړئ.
- په لاس راغلی ټکي، د وضیعه کمیاتو په سیستم کې وښیئ.

په پورتني فعالیت کې ولیدل شول چې هراختیاري ټکی (x, y) په یوه مستوي کې کولای شو د $(x+2, y)$ ټکي ته په دې ډول بدلون ورکړو، په دې حالت کې ویلای شو چې په لاس راغلی ټکی د راکړل شوی ټکي خېرې یا تصویر د $(x+2, y)$ تر بدلون لاندې دی، هغه اړیکه چې د مستوي د هر ټکي د وضیعه کمیاتو په مستوي کې یوازې او یوازې، یوه نوي ټکي ته نسبت ورکړېږ په مستوي کې د ځای یا ټکي بدلون بلل کیږي.

لومړی مثال: د $E(4,1)$، $D(1,2)$ او $C(2,4)$ ټکو خېرې یا تصویر، د لاندې بدلون پر بنسټ د وضیعه کمیاتو په مستوي کې په لاس راوړئ.

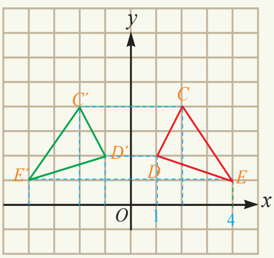
$$a: \quad (x,y)\xrightarrow{T_1}(-x,y) \qquad b: \quad (x,y)\xrightarrow{T_2}(x,-y)$$

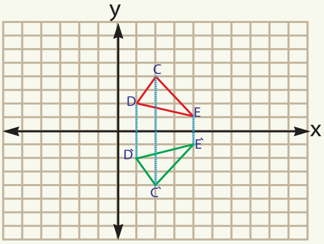
$$c: \quad (x,y)\xrightarrow{T_3}(y,x) \qquad d: \quad (x,y)\xrightarrow{T_4}(x+2,y+3)$$

حل: لومړی راکړل شوی ټکی د وضیعه کمیاتو په سیستم کې ټاکو.

a: د $(x,y)\xrightarrow{T_1}(-x,y)$ تربدلوني لاندې لرو چې:

$$T(4,1)=(-4,1)$$
$$T(1,2)=(-1,2)$$
$$T(2,4)=(-2,4)$$



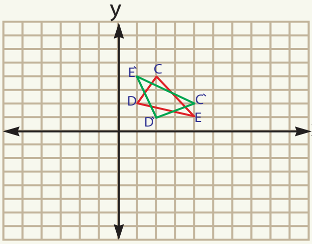


b: د $(x,-y) \xrightarrow{T_2} (x,y)$ تربدلون لاندې لرو چې:

$R(4,1)=(4,-1)$

$R(1,2)=(1,-2)$

$R(2,4)=(2,-4)$

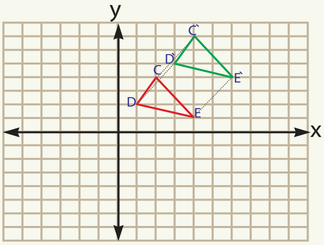


c د $(y,x) \xrightarrow{T_3} (x,y)$ تربدلون لاندې لرو چې:

$M(4,1)=(1,4)$

$M(1,2)=(2,1)$

$M(2,4)=(4,2)$



d: د $(x+2,y+3) \xrightarrow{T_4} (x,y)$ تربدلون لاندې لرو چې:

$S(4,1)=(6,4)$

$S(1,2)=(3,5)$

$S(2,4)=(4,7)$

په پورتنیو مثالونکې ښودلای شو چې د ځای په بدلونونو سره د ټکو ترمنځ واټن، توپیرنه کوي.

د مثال په ډول: که $T(c)=c'$ او $T(E)=E'$ وي، نو $EC=E'C'$ ده.

هغه بدلونونه چې د ټکو ترمنځ واټن ساتي، ایزومتري (*Isometry*), بلل کیږي.

که یوشکل د ایزومتري په ډول خپل ځای بدل کړي، نو د اصل څېرې یا شکل سره انطباق منونکی دی.

پوښتنې

1- د $(1,-1),(-2,-2),(-3,1)$ او $(3,3)$ ټکو تصویر د لاندېنیو بدلونونو پر بنسټ د وضیعه کمیاتو په سیستم کې په لاس راوړئ.

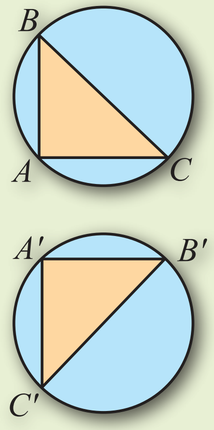
a: $(x,y) \xrightarrow{T} (x-1,y+2)$

b: $(x,y) \xrightarrow{D} (2x,y)$

c: $(x,y) \xrightarrow{K} (x+5,0)$

d: $(x,y) \xrightarrow{R} (0,y-2)$

e: $(x,y) \xrightarrow{P} (3x-1\ ,\ y+2)$



انتقال
(Translation)

په مخامخ شکل کې، د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث چې په مستوي کې یې له لومړي حالته، دوم حالت، $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ غوره کړې دی،تاسوکولای شئ چې ددې حرکت د ځای بدلون شرح کړئ؟

فعالیت

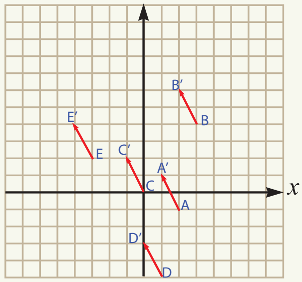
- د وضیعه کمیاتو په مستوي کې د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث رسم او مختصات یې ولیکئ.
- د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث رأسونه د محور په مثبت جهت، د (2) واحد په اندازه او د y محور په مثبت جهت د (1) واحد په اندازه حرکت ورکړئ، نو یو حاصل شویو ټکوته A', B' او C' ووایئ.
- د A', B' او C' ټکي یو له بل سره وتړئ او د $\overset{\Delta}{ABC}$ او $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ مثلثونه، د اضلاعو د اوږدوالي اوظاهري شکل له مخې پرتله کړئ.

که چیرې، د یوه شکل ټول ټکي په یوه ټاکلي جهت(لورى) او یو واټن حرکت ورکړو په لاس راغلی شکل له لومړي شکل سره انطباق منونکي دي، دې حرکت ته انتقال وایي او هغه په دې ډول ښودل کیږي: $T(x,y)=(x+h,y+K)$
په داسې حال کې چې h او k حقیقي عددونه دي.

لومړی مثال: د $A(2,-1), B(3,4), C(0,0), D(1,-5)$ او $E(-3,2)$ ټکی د وضیعه کمیاتو په سیستم کې د $T(x, y) = (x-1, y+2)$ انتقالي رابطې په اساس وښیئ.

حل: لومړی راکړل شوي ټکي د وضیعه کمیاتو په سیستم کې وښیئ اوبیا هغه ټکی چې د $T(x, y) = (x-1, y+2)$ اریکې خخه لاسته راځي په لاس راورئ.

$$A(2,-1), T_A(2-1,-1+2)=(1,1)$$
$$B(3\ ,\ 4), T_B(3-1\ ,\ 4+2)=(2,6)$$
$$C(0\ ,\ 0), T_C(0-1\ ,\ 0+2)=(-1,2)$$
$$D(1\ ,-5), T_D(1-1\ ,-5+2)=(0,\ -3)$$
$$E(-3\ ,2), T_E(-3-1\ ,2+2)=(-4,\ 4)$$



پـه پورتنـي مثـال کـې، د ټکـو لـه ترلوڅخه د شـکل څېره لاسـته راځـي، ليدل کېـږي چې د $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$ او $\overline{EE'}$ يو له بل سره موازي او مساوي دي.

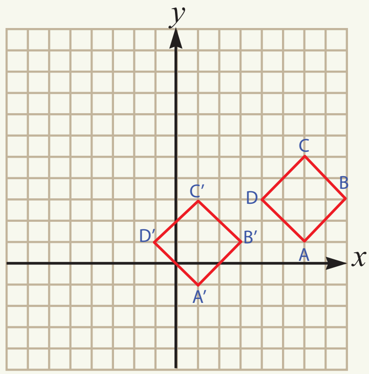
دويم مثال: که چېرې $A(6,1), B(8,3), C(6,5)$ او $D(4,3)$ د يوې مربع راسونه وي، هغه د وضعيه کمياتو په سيستم کې ترديې $T(x, y) = (x-5, y-2)$ اړيکې لاندې رسم کړئ.

الف: د مربع د اضلاع ګانو اوږدوالي اوتصوير، نظر يوبل ته پرتله کړئ.

ب: د مربع د اضلاع ګانو ميل اوڅېره يې، نظر يوبل ته پرتله کړئ.

حل: د ABCD منطقه مربع ترانتقال لاندې د $\boxed{A'B'C'D'}$ څلور ضلعي ده.

$$A(6,1), T_A=(6-5\ ,\ 1-2) \quad \Rightarrow A'=(1,-1)$$
$$B(8,3), T_B=(8-5\ ,\ 3-2) \quad \Rightarrow B'=(3,1)$$
$$C(6,5), T_C=(6-5, 5-2) \quad \Rightarrow C'=(1,3)$$
$$D(4,3), T_D=(4-5, 3-2) \quad \Rightarrow D'=(-1,1)$$



د (الف) او (ب) جزونو د زده کوونکو کورنی دنده ده.

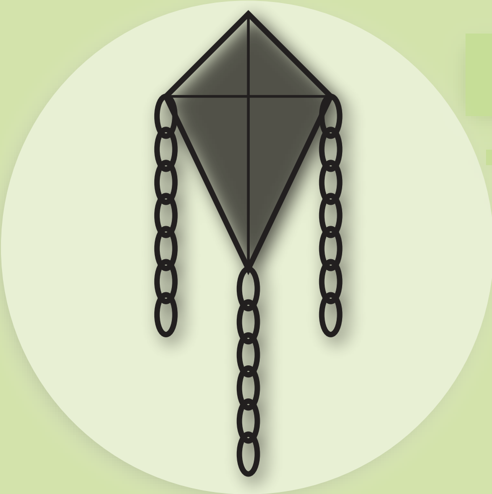
انتقال يو ايزومتري رابطه ده.

پوښتني

1- که د $M(1,-1)$, $N(2,-5)$، $O(2,5)$ او $P(3,3)$ يوه څلور ضلعي وي، څلور ضلعي او د هغې تصوير تر دې رابطې $T(x, y) = (x+9, -y)$ لاندې رسم کړئ.

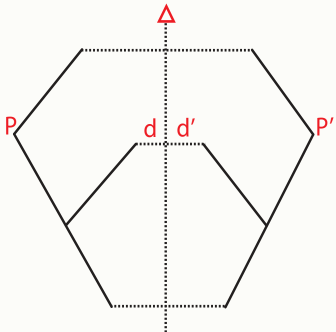
۲- که $I(5,0)$, $L(7,0)$ او $0(5,3)$ د يوه مثلث رأسونه وي، مثلث او د هغې تصوير ياڅېره د $F(x, y) = (-y+3, x-3)$ بدلون پربنسټ رسم کړئ.

انعـکاس
(Reflection)



د کاغـذ پـران خپرې تـه پاملرنـه وکړئ، ستاســو په نظر دا کاغذپران نسبت کوم یوه قطر ته متناظردی؟

فعالیت



- د یوې صفحې په نیمایي کې یوشکل رسم کړئ.
- د شکل ټولې کرښې په داسې رنګ رسم کړئ چې په کاغذ کې ژر جذب نه شي.
- کاغذ په منځ داسې قات کړئ چې د قات شوې لیکې یوې خوا ته شکل پروت وي.
- صفحه خلاصه کړئ، ووایئ چې کوم شکل د اصلي شکل مخامخ پروت او د دوی ترمنځ څه توپیر دی؟

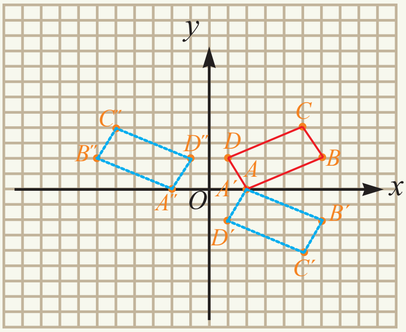
تعریف

که چیرې د P شکل یا خیرې هر ټکی، د p' شکل یاخېرې په هر ټکي کې داسې بدل شي چې د P شکل یاخیرې د هر ټکي واټن، نظر Δ محورته د p' د شکل د هر ټکي واټن سره مساوي وي، دې بدلون ته نظر Δ محورته انعکاس وایي او Δ محور ته، د انعکاس محوروایي.

لومړی مثال: که چېرې د $A(2,0)$، $B(6,2)$ $C(5,4)$ او $D(1,2)$ ټکي د یوه مستطیل رأسونه وي، د وضیعه کمیاتو په سیستم کې مستطیل رسم، خېره او تصویر یې نظر x او y محورته رسم کړئ.

حل: که چیرې د $\overline{ABCD}$ مستطیل خېره نظرد y محور ته رسم کړو په دې حالت کې یوازې د x مختصه یې په $(-x)$ بدلیږي او که چیرې خېره یا تصویر یې نسبت x محورته رسم کړو

يوازي د y مختصه يې، په $(-y)$ بدليږي، لکه څرنګه چې په شکل کې ليدل کيږي.



ټکی $(x\ ,\ y)$	نظر x محورته انعکاس $(x\ ,\ -y)$	نظر y محور ته انعکاس $(-x\ ,\ y)$
$A(2\ ,\ 0)$	$A'(2\ ,\ 0)$	$A''(-2\ ,\ 0)$
$B(6\ ,\ 2)$	$B'(6\ ,\ -2)$	$B''(-6\ ,\ 2)$
$C(5\ ,\ 4)$	$C'(5\ ,\ -4)$	$C''(-5\ ,\ 4)$
$D(1\ ,\ 2)$	$D'(1\ ,\ -2)$	$D''(-1\ ,\ 2)$

د $T(x,y)=(-x,y)$ ليږدونه، نسبت y محورته يو انعکاس دی.

د $T(x,y)=(x,-y)$ ليږدونه، نسبت x محورته يو انعکاس دی.

د $T(x,y)=(x,y)$ ليږدونه، نسبت $y=x$ مستقيم ته يو انعکاس دی.

پوښتنې

1- که $(A(3,1)$ ، $B(7,1)$ او $C(3,1)$ د يوه مثلث رأسونه وي، مثلث او د هغې تصوير ياخپره د لاندې ورکړل شويو د انعکاسي اړيکو پر بنسټ رسم کړئ.

$a:\ R_1(x,y)=(-x,y)$ $\qquad$ $b:R_2(x,y)=(x,-y)$

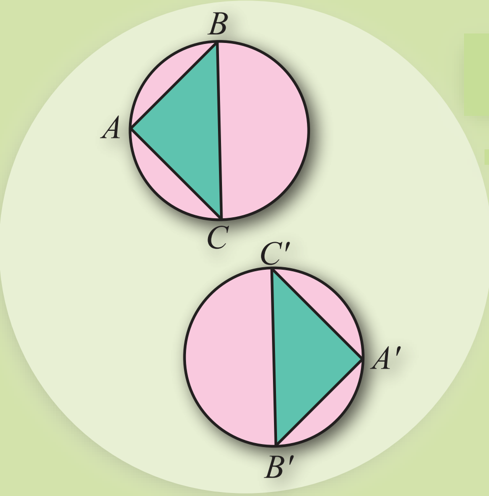
$c:\ R_3(x,y)=(y,x)$ $\qquad$ $d:R_4(x,y)=(-y,-x)$

2- که چيرې $(A(0,2)$ ، $(B(-5,0)$ ، $C(-3,-5)$ او $D(2,-3)$ د يوې مربعې رأسونه وي، مربع او د هغې تصوير د $R(x,y)=(-x,-y)$ انعکاسي اړيکې پر بنسټ رسم کړئ.

۳- د $(A(1,4)$ ، $B(3,-2)$ او $C(5,1)$ د يوه مثلث رأسونه وي، د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث تصوير ياخپره، تر انعکاس لاندې نسبت لاندې کرښو ته:

- $x+2=0$ رسم کړئ او په $A'\overset{\Delta}{B'}C'$ يې ونوموئ.
- $y+3=0$ رسم کړئ او په $A''\overset{\Delta}{B''}C''$ يې ونوموئ.

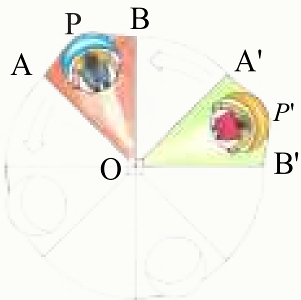
دوران
(Rotations)



په مخامخ شــکل کې د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث په مســتوي کې حرکت کړی او د $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ نوی ځای یې نیولی دی، تاسې کولای شئ د دې ډول بدلون حرکت شرح کړئ؟

فعالیت

مخامخ مدل د ماشومانو د لوبو د خرخ دوه بېلابېل ځایونه راښیي.



- له شکل څخه لیدل کېږي چې A' د A ټکي متناظر او B' د B ټکي متناظر دی، د $\hat{AOA'}$ او $\hat{BOB'}$ زاویې اندازه کړئ او یو له بلې سره پرتله کړئ؟
- اوس د خرخ د څوکې په لومړي ځای یوټکی وټاکئ اوهغه په P ونوموئ.
- د P ټکي متناظر ټکی، د څوکې په دویم ځای کې پیدا کړئ او هغه p' ونوموئ.
- د $\hat{POP'}$ زاویه اندازه کړئ.

د پورتني فعالیت په پام کې نیولو سره، دوران په مستوي کې د لېږدونې په عنوان داسې تعریفوو:

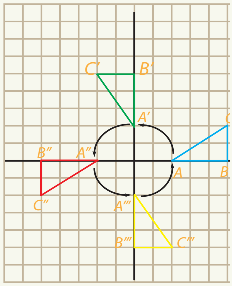
که یوشکل په یوه مستوي کې د یوه ټاکلي ټکي په شاوخوا د $\hat{\alpha}$ زاویې په اندازه دوران وکړي ټول ټکي یې د $\hat{\alpha}$ زاویې په اندازه دوران کوي، په دې حالت کې، د O ثابت ټکی د دوران مرکز اود $\hat{\alpha}$ ثابته زاویې ته د دوران زاویه وایي.

مثال: د B(5,0), A(2,0) او $C(5,2)$ د یوه مثلث رأسونه دي، د وضعیه کمیاتو په مستوي کې د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث او د هغه څېره یا تصویر لاندې تبدیل ورکړ شویو اړیکو په اساس رسم او بیا هریو بدلون تشریح کړئ.

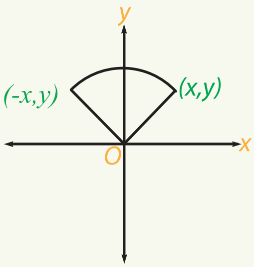
الف: $R_1(x, y) = (-x, y)$ ب: $R_2(x, y) = (-x, -y)$ ج: $R_3(x, y) = (y, -x)$

حل:

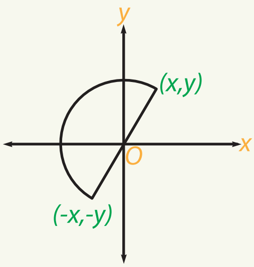
تکی	خېره تصوير		
(x,y)	(-y,x)	(-x,-y)	(y,-x)
A(2,0)	A'(0,2)	A''(-2,0)	A'''(0,-2)
B(5,0)	B'(0,5)	B''(-5,0)	B'''(0,-5)
C(5,2)	C'(-2,5)	C''(-5,-2)	C'''(2,-5)



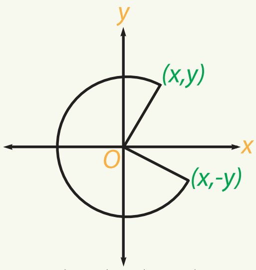
په شکل کې ليدل کېږي چې د R_1, R_2 او R_3 بدلونونه، د وضعيه کمياتو د مبدأ په مرکز دورانونه، په ترتيب د $90°, 180°$ او $270°$ زاويوسره دي.



R(x,y)=(-y,x)
د دوران مرکز (0,0)
د دوارن زاويه $90°$



R(x,y)=(-x,-y)
د دوران مرکز (0,0)
د دوارن زاويه $180°$



R(x,y)=(y,-x)
د دوران مرکز (0,0)
د دوارن زاويه $270°$

پوښتني

1- که A(0,0) B(6,-2) او C(7,1) د يوه مثلث رأسونه وي.

الف: د $R(x, y) = (-y, x)$ ترتبديل لاندې د ABC مثلث شکل اوتصوير رسم کړئ.

ب: د مثلث د اضلاع ګانو اوږدوالی د هغه له تصوير يا خېرې سره پرتله کړئ. آيا دا دوران يو ايزومتري دی؟

2- که (A(-1,-2), B(7,2), C(5,6) او D(-3,2) د يو مستطيل رأسونه وي.

الف: $R(x, y) = (-y, -x)$ تر دوران لاندې مستطيل او د هغه تصويريا خېره رسم کړئ.

ب: د مستطيل د اضلاع ګانو اوږدوالی او مساحت، د هغه له تصوير ياخېرې سره پرتله کړئ.

د درېم څپرکي لنډيز:

• په يوه مستوي کې چې دوه افقي اوعمودي محوررونه يو بل په عمودي توګه قطع کړي، د وضيعه کمياتو د سيستم په نامه يادېږي.

• د وضيعه کمياتو په سيستم کې افقي محورته، د فاصلې يا واټن محور اوعمودي محورته، د ترتيب محور او د تقاطع ټکي ته يې مبدأ وايي.

• د A او B دوو ټکو تر منځ واټن، د $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ اړيکې څخه لاسته راځي.

• د يوې کرښې د منځ ټکي مختصات د $M(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2})$ څخه لاسته راځي.

• هغه کرښه چې د y مختصه يې صفر وي د منځ د ټکي مختصات يې $M(\frac{x_1+x_2}{2},0)$ دی.

• هغه کرښه چې د x مختصه يې صفر وي، د منځ د ټکي مختصات يې $M(0,\frac{y_1+y_2}{2})$

د هرې مستقيمې کرښې ميل د $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ له اړيکو څخه لاسته راځي.

• د هر مستقيم خط ميل، په هغه زاويې پورې اړه لري، چې مستقيم يې د x محور له مثبت جهت سره جوړ وي.

• هر مستقيم، چې د x محور د مثبت جهت سره حاده زاويه جوړه کړي، ميل يې مثبت او که منفرجه زاويه جوړه کړي، ميل يې منفی دی.

• موازی مستقيمونه، د مساوي ميلونو لرونکي دي.

• هر مستقيم خط چې له x محور سره موازي وي، ميل يې صفر او هر مستقيم خط چې د x پر محور عمود وي، ميل يې نه دی تعريف شوی.

• دوه مستقيم خطونه هغه وخت يو پربل عمود دي چې د ميلونو د ضرب حاصل يې (-1) وي.

• درې ټکي هغه وخت په يوې کرښې پراته دي چې د هر قطعه خط ميلونه يې سره مساوي وي.

• د وضيعه کمياتو په مستوي کې د يوه ټکي هغه اړيکه چې يوازې او يوازې يوه نوي ټکي ته نسبت ورکړي، يوه لېږدونه ياتغيير مکان بلل کيږي.

• که چېرې د يوه شکل ټولو ټکو ته، په يوه ټاکلي جهت او يوه واټن کې حرکت ورکړو، په لاس راغلی شکل له لومړي شکل سره انطباق منونکی دی او دې حرکت ته انتقال وايي.

• که په يوه مستوي کې يوشکل د يوه ټاکلي ټکي په شاوخوا د $\hat{\alpha}$ زاويې په اندازه دوران وکړي ټول ټکي يې په عين زاويه دوران کوي چې دې حرکت ته دوران وايي.

د دریم څپرکی پوښتنې

- په لاندې پوښتنوکې هرې پوښتنې ته څلورځوابونه ورکړ شوي دي، سم ځواب وټاکئ.

1− د دوو عمودي کرښو د میلونو د ضرب حاصل:

a) (1) دی. b) صفر دی. c) ∞ دی. d)منفي یو دی.

2− د مستقیمې کرښې معادله چې له y محور سره یې د تقاطع ټکی او میل یې ښکاره وي، عبارت له:

a) $y = mx + c$ b) $y = b$ c) $y = mx + b$ d) $m = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$

3− د هغې کرښې معادله چې دوه ټکي یې ښکاره وي، عبارت له:

a) $y = mx + b$ b) $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ c) $\dfrac{y - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y_2 - y_1}{x - x_1}$ d) $y = mx$

4- د $A(0, y_1)$ او $B(0, y_2)$ دوو ټکو د منځني ټکي مختصات عبارت دی له:

a) $M(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, 0)$ b) $M(\dfrac{y_2 + y_1}{2}, 0)$ c) $M(0, \dfrac{y_1 + y_2}{2})$ d) $M(0,0)$

5- د $A(x_1,0)$ او $B(x_2,0)$ دوو ټکو د منځني ټکي مختصات عبارت دي له :

a) $M(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, 0)$ b) $M(\dfrac{y_2 + y_1}{2}, 0)$ c) $M(0, \dfrac{y_1 + y_2}{2})$ d) $M(0,0)$

6− د A او B دوو ټکو ترمنځ واټن، عبارت دی له:

a) $AB = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2}$ b) $AB = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - (y_1 + y_2)^2}$

c) $AB = \sqrt{(x_2 + y_2)^2 + (x_2 - y_1)^2}$ d) $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

7− د یوه ټکي او د وضیعه کمیاتو د مبدأ ترمنځ واټن، عبارت دی له:

a) $AB = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ b) $AB = \sqrt{y_1^2 + y_1^2}$

c) $AB = \sqrt{x^2 + y^2}$ d) $AB = \sqrt{x^2 - y^2}$

8−د یوې مستقیمې کرښې میل عبارت دی له:

a) $m = \dfrac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$ b) $m = \dfrac{y_2 + y_1}{x_2 + x_1}$ c) $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ d) $m = \dfrac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1}$

9− دوه مستقیمونه هغه وخت یو له بل سره موازي وي چې:

a: د هغو میلونه سره مساوي وي. b: میلونه یې مساوي نه وی.

c: د میلونو د ضرب حاصل یې منفي یو وي. d: ټول ځوابونه سم دی.

• لاندې تش ځایونه، په مناسبو کلمو سره ډک کړئ:

۱- د وضیعه کمیاتو په سیستم کې، د x محورته، د .... او محورته د .... وایي.

۲- په دویمه ناحیه کې هغه ټکي پراته دي چې x یې .... او y یې .... دی.

۳- په دریمه ناحیه کې هغه ټکي پراته دي چې x او y دواړه .... دي.

٤- هغه مستقیم چې د x محور له مثبت جهت سره مساوي حاده زاویه جوړه کړي، میل یې .... دی.

٥- دوه موازي مستقیمې کرښې چې د x محورد مثبت جهت سره مساوي .... جوړ وي.

٦- د x له محورسره د هر موازي مستقیم میل .... دی.

٧- درې ټکي، هغه وخت په یوه مستقیمه کرښه پراته وي چې د ټوټه کرښو .... سره مساوي وي.

٨- که د دووکرښو میلونه، له یوبل سره مساوي نه وي، دا کرښې .... دي.

• لاندې جملې، کومې سمې اوکومې یې ناسمې دي، د سمویه مخ کې د(ص) توری او د ناسمې په مخ کې د (غ) توری ولیکئ.

1- ( ) که د وضیعه کمیاتو په مستوي کې د هر ټکي لپاره یوازې او یوازې یوه نوي ټکي ته نسبت ورکړئ، په مستوي کې بدلون رامنځ ته کیږي.

2- ( ) که د p شکل هر ټکي د P' شکل په یوه ټکي داسې تبدیل شي چې د p د شکل د هر ټکي واټن، نظر یوه محورته، د P' د شکل له هر ټکي سره مساوي وي، دې بدلون ته انعکاس وایي.

3- ( ) د $T(x, y) = (-x, y)$ بدلون، نسبت y محورته، یوانعکاس دی.

4- ( ) د $T(x, y) = (x, -y)$ بدلون، نسبت x محورته، یو انعکاس دی.

5- ( ) د $T(x, y) = (y, x)$ بدلون، نسبت $y = x$ مستقیم ته، یوانعکاس دی.

6- ( ) انتقال هغه تغییرمکان یا لیږدونه ده چې په هغه کې د واټنونو او د زاویو پراخوالی ثابت پاتې شي.

7- ( ) که په مستوي کې یوشکل(O) د ټاکلي ټکي په شاوخوا، د $\hat{\alpha}$ زاویې په اندازه دوران وکړي، د هغې ټول ټکي په عین زاویه دوارن کوي.

- لاندې سوالونه حل کړئ:

1- لاندې ټکي چې وضعیه کمیات یې ورکړ شوي دي، د وضعیه کمیاتو په سیستم کې وټاکئ.

$1:\ (0,1)$ $2:\ (2,3)$ $3:\ (0,-4)$ $4:\ (5,0)$

2- د لاندې ټکو د جوړو ترمنځ واټن چې وضعیه کمیات یې ورکړل شی ښکاره کړئ.

$1:\ (0,9),(-5,4)$ $2:\ (4,1),(3,-2)$ $3:\ (-7,4),(1,-11)$

3-دا را وښیئ چې لاندې ټکي د یوه قایم الزاویه مثلث رأسونه دي او هم د مثلث مساحت پیدا کړئ.

$1:\ (0,9)\ ,\ (-4,-1)\ ,\ (3,2)$ $2:\ (3,-2)\ ,\ (-2,3)\ ,\ (4,-4)$

4-دا څرګند کړئ چې لاندې ورکړی شوي ټکي، د یوې مستقیمی کرښی له پاسه پراته دي.

$1:\ (0,4)\ ,\ (3,-2)\ ,\ (-2,8)$ $2:\ (1,2)\ ,\ (-3,10)\ ,\ (4,-4)$

5-د یوې مستقیمې کرښې میل او یو ټکی په لاندې ډول ورکړل شوي، د هغې معادله په لاس راوړئ.

$1:\ (2,3)\ ,\ m=-\dfrac{1}{2}$ $2:\ (-4,1)\ ,\ m=-\dfrac{2}{3}$ $3:\ (-1,-4)\ ,\ m=-2$

6- که د یوه مستطیل رأسونه $(-3,1),(-1,3),(3,-1)$ او $(1,-3)$ وي، مساحت یې پیدا کړئ.

7- که د یوه متوازي الاضلاع رأسونه $(2,4),(5,9)$ ، $(4,9)$ او $(1,4)$ وي، د قطرونو اوږدوالی یې پیدا کړئ.

8- را وښایاست چې د $(-3,1),(-9,4),(12,0)$ او $(6,3)$ د یوه متوازي الاضلاع راسونه دي.

9- که $(-3,2),(5,0)$ او $(1,-3)$ د یوه مثلث راسونه وي د اضلاع ګانو د منځنی ټکي وضعیه کمیات په لاس راوړئ.

10- ثبوت کړئ:

الف: چې د مربعې قطرونه یو پربل عمود دي.

ب: چې د مستطیل قطرونه یوبل نیمایي کوي.

11- هغه مستقیم چې د $A(3,-1)$ او $B(5,3)$ ټکوڅخه تېرېږی د وسطي عمود معادله یې پیدا کړئ.

12- د هغه مستقیم معادله پیدا کړئ چې $P(4,5)$ له ټکي څخه تېر شي او په ترتیب سره د x او y له محورونو سره موازي وي.

13- که چېرې $A(5,0), B(7,0)$ او $C(5,3)$ د یوه مثلث رأسونه وي.

الف: د $T(x,y)=(-y+3,x-3)$ ترتیب لاندې مثلث او د هغه تصویر یاځېره رسم کړئ.

ب: د ABC مثلث تصویر، د $R\ (x,y)=(-y,x)$ تر دوران لاندې پیدا کړئ او هغه ته $A'B'C'$ ووایئ، وروسته د $T(x,y)=(x+3,y-3)$ تصویر یا ځېره د ترانتقال یالېږدونې لاندې وټاکئ.

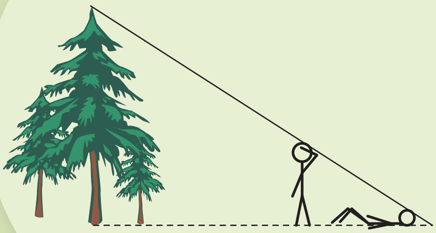


څلورم څپــرکی

مثلثـات



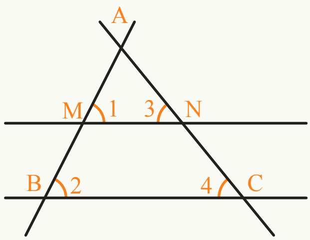
په مثلث کې د تالس قضيه



دوه زده کوونکي له يو بل سره خبرې کوي چې د يوې ونې جګ والی څنګه اندازه کړي، په دوی کې يو په ځمکه اوږد پربوت او له خپل ملګري څخه يې وغوښتل چې دومره حرکت وکړي چې د ده سر او د ونې څوکه په يوه مستقيمه کرښه سره ووينې. د زده کوونکي په غوښتنه سوچ وکړئ.

فعاليت

- د $\overset{\Delta}{ABC}$ په مثلث کې، $\overline{MN} // \overline{BC}$ دی. د هرې ټوټه کرښې اندازه، د خط کش په واسطه پيدا او په تشو ځايونو کې يې وليکئ؟



$\overline{MN} = ___$ $\quad \overline{AN} = ___$ $\quad \overline{AM} = ___$

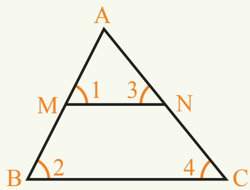
$\overline{BC} = ___$ $\quad \overline{AC} = ___$ $\quad \overline{AB} = ___$

- هغه زاويې چې يوه له بلې سره مساوي ده وښيئ؟
- د $\dfrac{\overline{MN}}{\overline{BC}}$ ، $\dfrac{\overline{AN}}{\overline{AC}}$ او $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{AB}}$ نسبتونه پيدا او يو له بل سره څه اړيکه لري؟

له پورتني فعاليت څخه د تالس قضيه داسې بيانوو؟

قضيه: که د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث په يوې ضلعې يا ضلعې يا خنډې، موازي کرښه رسم کړو، د تشکيل شوي مثلث د اضلاعو نسبت، د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث پر اضلاعو يو له بل سره مساوي دي. دا قضيه په مثلث کې د تالس قضيې په نامه يادېږي.

ثبوت: څرنګه چې د $\overset{\Delta}{ABC}$ په مثلث کې $\overline{MN} // \overline{BC}$ دي، نو کولای شو وليکو چې:



$$\left.\begin{array}{l} \hat{1} = \hat{2} \text{....... متوافقه} \\ \hat{3} = \hat{4} \text{....... متوافقه} \\ \hat{A} = \hat{A} \text{..... مشترک} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{AMN}$$

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{BC}}$$

لومړی مثال: د $\overset{\Delta}{ABC}$ په قايم الزاويه مثلث کې $\overline{EF}$ له $\overline{BC}$ سره موازي دي په پام کې ونيسئ، د قايمو اضلاعو اود $\overline{EF}$ د موازي کرښې اوږدوالی پيدا کړئ؟

حل: څرنګه چې د $\overset{\Delta}{ABC}$ په مثلث کې $\overline{EF}//\overline{BC}$ سره دي، نو د تالس د قضيې پربنسټ دا دوه مثلثونه سره ورته يا مشابه دي، نو کولای شو وليکو چې:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AF}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{EF}}{\overline{BC}}$$

$$AC^2=BC^2+AB^2$$

$$5^2=BC^2+3^2$$

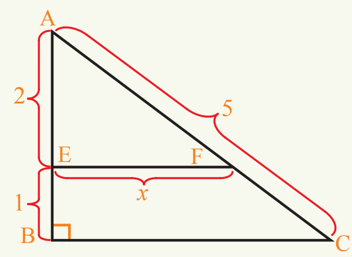
$$BC^2=25-9=16$$

$$\boxed{BC=4}$$

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{EF}}{\overline{BC}}$$

$$\frac{2}{3}=\frac{x}{4}$$

$$x=\frac{8}{3}=2.6$$

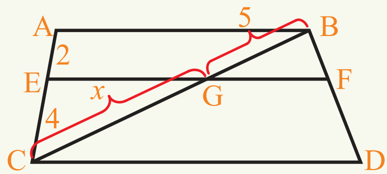


دويم مثال: په لاندې ذوزنقه کې، $\overline{EF}//\overline{BA}$ دي، د x مقدار وټاکئ.

$$\frac{\overline{CG}}{\overline{GB}}=\frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} \quad \text{يا} \quad \frac{\overline{CG}}{\overline{CE}}=\frac{\overline{GB}}{\overline{AE}}$$

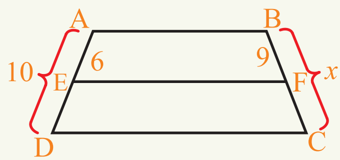
$$\frac{x}{4}=\frac{5}{2} \Rightarrow x=\frac{4\cdot 5}{2}=\frac{20}{2}$$

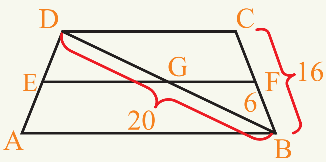
$$x=10$$



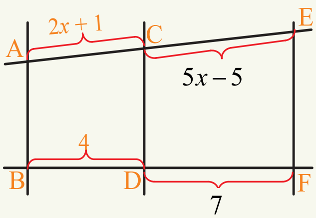
پوښتنې

1- د ذوزنقو په لاندې شکلونو کې د x مقدار وټاکئ؟

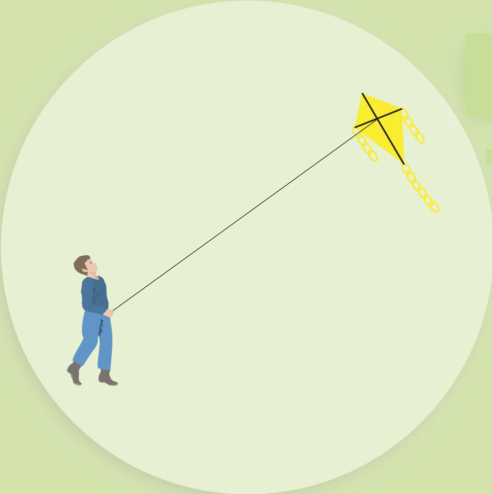




2- په لاندې شکل کې، که $\overline{CD}//\overline{EF}$ او $\overline{AB}//\overline{CD}$ وي، د x مقدار وټاکئ؟



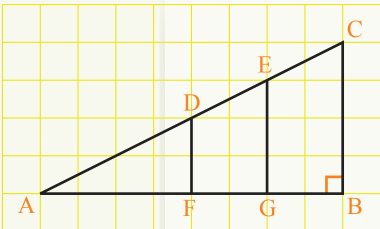
د يوې حاده زاويې ساين



که يو کاغذ پران په هوا کې د الوتلو په حالت کې وي، کولای شئ واتن يې له ځمکې څخه په لاس راوړئ؟

فعاليت

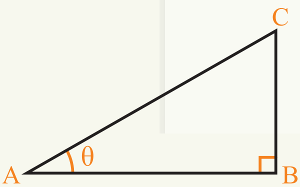
- په قايم الزاويه مثلث کې، د $\overline{AC}$ په وتر باندې د D او E ټکي ټاکل شوي دي. له دې ټکو څخه د مثلث په $\overline{BC}$ ضلعه موازي رسم کړئ او د تقاطع ټکي يې، په وار سره F او G نوموو.
- له خط کش څخه په ګټې اخيستنې سره، د مثلث اضلاعو اندازه او د $\frac{\overline{DF}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{EG}}{\overline{AE}}$ او $\frac{\overline{CB}}{\overline{AC}}$ نسبتونه محاسبه او پرتله يې کړئ؟



- ايا د D او E ټکو د ځای په بدلون سره د $\frac{\overline{DF}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{EG}}{\overline{AE}}$ او $\frac{\overline{CB}}{\overline{AC}}$ نسبتونه هم بدلون کوي؟ ديوه ټکي په ټاکلو سره هغه وڅيړئ.
- د AC د ځای په بدلون، د $\hat{A}$ زاويې په مقدار کې بدلون رامنځ ته کېږي.
- اوس $\overline{AC}$ ثابت پرېږدئ او د $\hat{A}$ زاويې ته زياتوالی ورکړئ. سوچ وکړئ، چې په پورتنيو مساوي نسبتونو کې څه پېښېږي؟ ويې څېړئ؟

تعريف

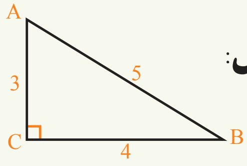
په هر قايم الزاويه مثلث کې، د يوې حاده زاويې د مخامخ ضلعې او ږدوالی، د وتر پر اوږدوالي تل مساوي له يو ثابت مقدار سره دی، چې د حاده زاويې په اندازې پورې اړه لري. دې نسبت ته $Sin\theta$ (د حاده زاويې ساين) ويل کېږي.



$$\sin\theta = \frac{\text{د } \theta \text{ حاده زاويې د مخامخ ضلعې اوږدوالی}}{\text{دوتر اوږدوالی}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}}$$

لومړی مثال: په لاندې شکل کې، $SinA$ او $SinB$ په لاس راوړئ.

حل:

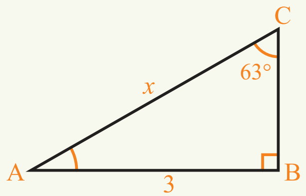


$$\sin A = \frac{\text{د A زاویې د مخامخ خنډې یا ضلعې اوږدوالی}}{\text{دوتر اوږدوالی}} = \frac{\overline{BC}}{AB} = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin \hat{A} = 0.8$$

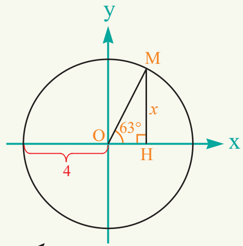
$$\sin B = \frac{\text{د B زاویې د مخامخ خنډې یا ضلعې اوږدوالی}}{\text{دوتر اوږدوالی}} = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5} = 0.6$$

دویم مثال: که $Sin63^o$ مساوي په 0,891 وي، په لاندې شکلونو کې د x اندازه پیدا کړئ.

شکل (الف)



شکل (ب)



حل:

د الف جز: د یوې حاده زاویې له تعریف څخه په ګټې اخیستنې سره کولای شو ولیکو چې:

$$\sin 63^\circ = \frac{AB}{AC}$$

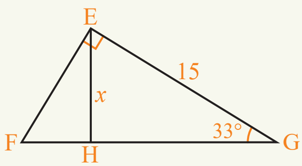
$$0.891 = \frac{3}{x} \Rightarrow x = \frac{3}{0.891} \quad \Rightarrow \quad x \approx 3.37$$

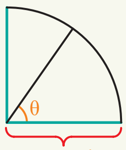
د ب جز:

$$\sin 63^\circ = \frac{MH}{OM}$$

$$0.891 = \frac{x}{4} \Rightarrow x \approx 3.56$$

پوښتنې





1- که $Sin33^o$ مساوي، په 0,5446 وي، په مخامخ شکل کې، د x عددي قیمت پیدا کړئ.

2- د دایرې د څلورمې برخې شکل په پام کې ونیسئ.

الف: که د θ زاویه لویه شي $Sin\theta$ څرنګه بدلون مومي؟

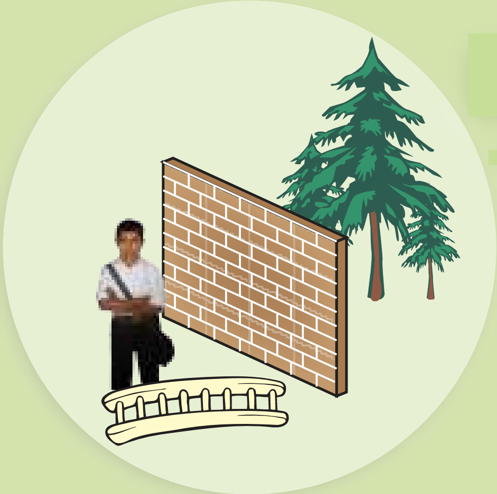
ب: که د θ زاویه صفر ته نژدې شي $Sin\theta$ کوم عدد ته نژدې کېږي؟

ج: که زاویه 90^o ته نژدې شي، $Sin\theta$ کوم عدد ته نژدې کېږي.

3- د 40^o, 80^o او 65^o زاویې په وار سره رسم او بیا هره زاویه یوه قایم الزاویه مثلث کې رسم کړئ، د کربښې یا خط کش څخه په ګټې اخیستنې سره د مثلث اضلاعوې اندازه او $Sin80^o$, $Sin65^o$ او $Sin40^o$ پیدا کړئ او یو له بل سره یې پرتله کړئ.

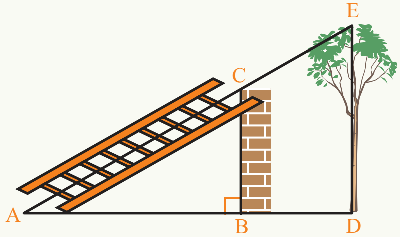
4- یو متساوي الساقین مثلث چې قاعده یې 8 واحده او $\hat{B} = 54^\circ$ وي، رسم کړئ. که یوه څنډه یا ضلعه یې 5 واحده وي د B زاویې Sin ساین پیدا کړئ.

د يوې حاده زاويې كوساين



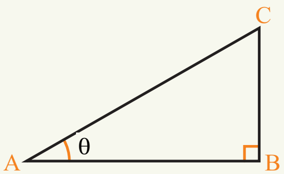
د يوه ديوال شاته د ناجو يوه ونه ولاړه ده. يو زده کوونکی غواړي و پوهېږي چې ونه له ديواله څومره واټن لري؟ د دې کار لپاره يې يوازې يوه لنډه زينه درلوده. فکر وکړئ هغه څه سوچ کوي؟

فعاليت



- په مخامخ شکل کې د تشکيل شويو مثلثونو نومونه واخلئ.
- $\overline{BC}$ او $\overline{DE}$ يو له بل سره څه اړيکه لري؟ ولې؟
- د $\overset{\Delta}{ABC}$ او $\overset{\Delta}{ADE}$ مثلثونه يو بل سره څه اړيکه لري؟
- د زينې واټن تر ديوال او بيا يې تر ونې پورې پيدا کړئ.
- د تالس د قضيې په مرسته لاندې مساوات تکميل او د $\overline{AE}$ اوږدوالی په لاس راوړئ.
- دا مقدار په څه پورې تړلی دی؟ $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{....}{AE}$

په عمومي ډول د $\overset{\Delta}{ABC}$ په قايم الزاويه مثلث کې چې يوه حاده زاويه يې θ ده، د دې زاويې د گاونډې يا مجاورې ضلعې د اوږدوالي او د وتر د اوږدوالي نسبت ته کوساين وايي.

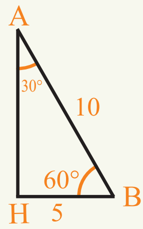


$$\cos\theta = \frac{\text{د } \theta \text{ زاويې د گاونډې ضلعې اوږدوالی}}{\text{دوتر اوږدوالی}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

مثال: د AHB پـه مثلـث كـې كـه $\hat{A}=30^\circ$ او $\hat{B}=60^o$ وي، وښاياسـت چـې

$\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$ او $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$, $\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$ دی.

حل: د فیثاغورث له قضیې څخه په ګټې اخیستنې سره د AH جګوالی کولای شو ولیکو چې:



$$\overline{AB}^2=\overline{AH}^2+\overline{HB}^2$$

$$10^2=\overline{AH}^2+5^2 \Rightarrow \overline{AH}^2=100-25=75$$

$$\overline{AH}=\sqrt{75} \Rightarrow \overline{AH}=5\sqrt{3}$$

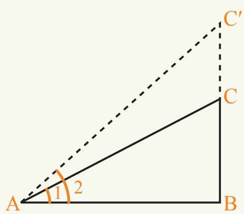
$$\sin 60^\circ=\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}}=\frac{5\sqrt{3}}{10}=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \cos 60^\circ=\frac{\overline{BH}}{\overline{AB}}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$

$$\sin 30^\circ=\frac{\overline{BH}}{\overline{AB}}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2} \quad , \quad \cos 30^\circ=\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

پوښتنې

1- كه يوه حاده زاويه لويه شي د كوساين په اندازه كې څه بدلون راځي؟

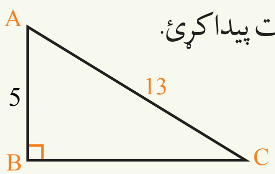
د مخامخ مثلث او مثلثاتي دايرې په مرسته خپل نظر بيان كړئ.



- د $CosA_1$ لپاره يو نسبت وليكئ.
- د $CosA_2$ لپاره يو نسبت وليكئ.
- په تشو ځايونو كې مناسبې علامې وليكئ.

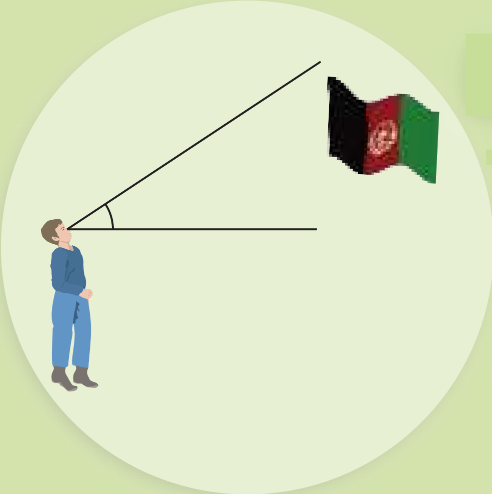
$\overline{AC}$		$\overline{AC'}$
$\cos A_1$		$\cos A_2$

3- په لاندې قايم الزاويه مثلث كې د $SinA$ او $CosA$ عددي قيمت پيدا كړئ.



4- د $\overset{\Delta}{ABC}$ په مثلث كې چې د اضلاعو اوږدوالې يې 8,6 او 10 واحده وي، د $SinA$ او $CosA$ مثلثاتي نسبتونه محاسبه كړئ.

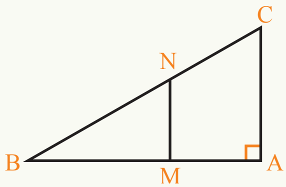
د حاده زاويې تانجنت



يو زده کوونکی، د بيرغ مخکې ولاړ دی.
سوچ کوې چې د بيرغ د ميلې اوږدوالی
څنګه پيدا کړې؟

فعاليت

د $\overset{\Delta}{BAC}$ مثلث، چې د $\hat{A}$ زاويه يې قايمه ده، د $\hat{B}$ زاويې مثلثاتي نسبتونه $(\cos\hat{B}, \sin\hat{B})$ په پام کې ونيسئ چې د $\overline{MN}$ ټوټه کرښه په $\overline{AC}$ موازي رسم شوې ده.

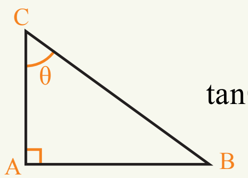


- د $\overset{\Delta}{BAC}$ مثلث په پام کې نيولو سره $\sin\hat{B}$ او $\cos\hat{B}$.
د $\overset{\Delta}{BAC}$ مثلث د اضلاعو له مخې وليکئ.
- د $\overset{\Delta}{BAC}$ مثلث د اضلاعو له مخې د $\dfrac{\sin\hat{B}}{\cos\hat{B}}$ نسبت وليکئ.
- له $\overset{\Delta}{BMN}$ مثلث څخه په ګټې اخيستنې سره د اضلاعو له مخې $\dfrac{\sin\hat{B}}{\cos\hat{B}}$ وليکئ.

د $\overline{MN}, \overline{BC}, \overline{AC}$ او $\overline{BN}$ کرښو د مخامخ اندازه کولو په مرسته پورتني دوه نسبتونه سره پرتله کړئ.

- فکر وکړئ، که چېرې $\dfrac{CosB}{SinB}$ پيدا کړو، نو دا نسبت د مخامخ اضلاعو له اوږدوالي سره تړاو لري يا يوازې د زاويې په مقدار پورې تړاو لري؟

لومړۍ پايله: په يوه قايم الزاويه مثلث کې د يوې حاده زاويې د مخامخ ضلعې اوږدوالی او د هغې زاويې د ګاونډي ضلعې د اوږدوالي نسبت، يو ثابت مقدار دی چې (د حاده زاويې تانجنت) په نامه يادېږي.



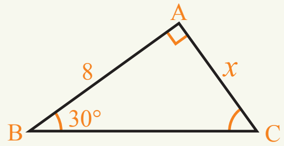
$$\tan\theta = \frac{\text{د } \hat{\theta} \text{ زاويې د مخامخ ضلعې اوږدوالی}}{\text{د } \hat{\theta} \text{ زاويې د ګاونډي ضلعې اوږدوالی}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

دویمه پایله: د θ حاده زاویې تانجنت د حاده زاویې ساین پر کوساین له نسبت سره مساوي دی:

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

دریمه پایله: $\frac{Cos\theta}{Sin\theta}$ یو بل مقدار دی چې د حاده زاویې کوتانجنت (Cotangentθ) یا د θ زاویې د ګاونډی یا مجاورې ضلعې اوږدوالي د θ زاویې د مخامخ خنډې یا مقابلې ضلعې پر اوږدوالي ته کوتانجنت $Cot\theta$ وایي. دا نسبت د نورو نسبتونو په څېر یوازې د زاویې په پراخوالي پورې اړه لري.

لومړی مثال: په لاندې مثلث کې که $x=\frac{8\sqrt{3}}{3}$ وي، د $\tan 30^{o}$ عددي قیمت په لاس راوړئ؟

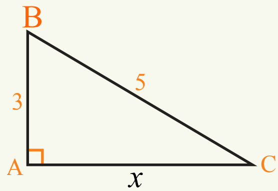


حل: د $\tan\theta$ له تعریف څخه په ګټې اخیستنې سره کولای شو ولیکو چې:

$$\tan 30^{\circ}=\frac{x}{8}\Rightarrow \tan 30^{\circ}=\frac{8\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{8}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

دویم مثال: د $B\overset{\Delta}{A}C$ مثلثې چې لاندې رسم شوی دی، په دې مثلث کې $\tan c,\cos c,\sin c$ او $\cot c$ په لاس راوړئ او د $\tan c$ رابطه د $\cos c$ او $\sin c$ نسبتونو سره پرتله کړئ؟

حل: لومړی د فیثاغورث د قضیې په مرسته، د ABC په مثلث کې، د AC اوږدوالی پیدا کوو.



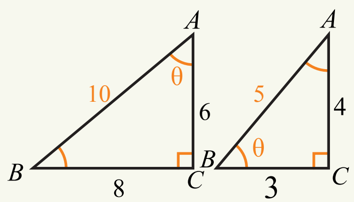
$$\overline{BC}^{2}=\overline{AB}^{2}+\overline{AC}^{2}$$

$$5^{2}=3^{2}+x^{2}\Rightarrow x^{2}=25-9\Rightarrow x^{2}=16\Rightarrow x=4$$

$$\sin C=\frac{3}{5}\qquad \cos C=\frac{4}{5}$$

$$\frac{\sin C}{\cos C}=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=\frac{3}{5}\div\frac{4}{5}=\frac{3}{5}\times\frac{5}{4}=\frac{3}{4}\Rightarrow \tan C=\frac{3}{4}\Rightarrow \cot C=\frac{4}{3}$$

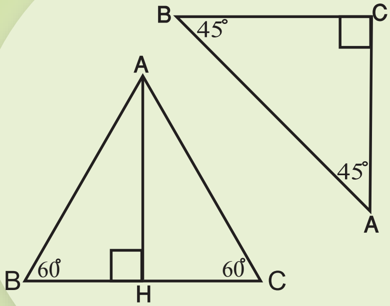
پوښتنې



1- په مخامخ شکلونو کې $Sin\theta, Cos\theta, \tan\theta$ او $Cot\theta$ پیدا کړئ.

2- د $\overset{\Delta}{ABC}$ په مثلث کې چې ضلعې یې سره مساوي دي، $\tan A$ او $\tan B$ پیدا کړئ؟

3- که د یوه قایم الزاویه مثلث قاعده ثابته وساتو او حاده زاویه یې لویه شي د $\tan\theta$ په نسبت کې څه بدلون پیښیږي؟



د ځانګړو زاويو مثلثاتي نسبتونه
($30°$، $60°$، $45°$ او $90°$)

مخامخ مثلثونه څه ډول مثلثونه دي؟ د اضلاعو اوږدوالی يې وټاکئ.

فعاليت

- د $\overset{\Delta}{ABC}$ يو متساوي الاضلاع مثلث رسم کړئ.
- د $\overline{AH}$ ارتفاع رسم کړئ، په دې ډول مثلثونو کې ارتفاع کومې ځانګړتیاوې لري؟
- د فیثاغورث له قضيې څخه په ګټې اخیستنې سره د مثلث ارتفاع پیدا کړئ؟
- آیا کولای شئ چې د 30^o او 60^o زاويو مثلثاتي نسبتونو عددي قيمت پيدا کړئ؟
- د $\overset{\Delta}{ABC}$ يو متساوي الساقين، قايم الزاويه مثلث رسم کړئ چې د هرې ضلعې اوږدوالی يې يو واحد وي؟
- هره حاده زاويه څو درجې ده؟ د وتر د اوږدوالي اندازه يې حساب کړئ.
- د 45^o زاويې مثلثاتي نسبتونه په لاس راوړئ.

له پورتني فعاليت څخه لاندې جدول جوړ ولای شو:

زاويې / مثلثاتي نسبتونه	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	نا ټاکلی (نا معين)

مثال: په لاندې اړیکو کې د x او y عددي قیمت پیدا کړئ.

1) $x=\sin 60^\circ+\sin 30^\circ$ 2) $y=\cos 60^\circ+\cos 30^\circ$

3) $\tan 60^\circ-\sin 30^\circ=?$ 4) $y=\tan 30^\circ-\cos 60^\circ$

5) $\tan 45^\circ-\sin 45^\circ=?$ 6) $y=\tan 30^\circ+\tan 60^\circ$

حل: په پورتنیو اړیکو کې د هر مثلثاتي نسبت پر ځای عددي قیمت وضع کوو:

$$1)\ x=\sin 60^\circ+\sin 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$2)\ y=\cos 60^\circ+\cos 30^\circ=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$3)\ x=\tan 60^\circ-\sin 30^\circ=\sqrt{3}-\frac{1}{2}=\frac{2\sqrt{3}-1}{2}$$

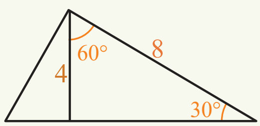
$$4)\ y=\tan 30^\circ-\cos 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{2}=\frac{2\sqrt{3}-3}{6}$$

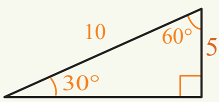
$$5)\ x=\tan 45^\circ-\sin 45^\circ=1-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

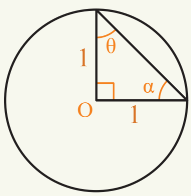
$$6)\ y=\tan 30^\circ+\tan 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}+\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}+3\sqrt{3}}{3}$$

پوښتني

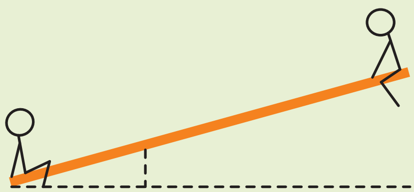
په لاندې شکلونو کې د $30^o, 45^o$ او 60^o زاویو، د $Sin, Cos, \tan$ او Cot مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.







د یوه مستقیم خط د میل او تانجنت ترمنځ اړیکه



د رافعې میل ښــي یاکیڼــې خوا ته په څه پورې اړه لري؟

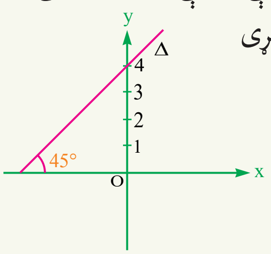
فعالیت

- د $B(0,0), C(1,0)$ او $A(1,3)$ ټکي، د وضعیه کمیاتو په مستوي کې وښایاست، هغه مثلث چې رأسونه یې له دې ټکو څخه جوړېږي، څه ډول مثلث دی؟ ولې؟
- د $\overline{AB}$ مستقیمې کرښې میل په لاس راوړئ.
- د $\overline{AB}$ مستقیمې کرښې معادله د $y = mx + h$ په شکل ولیکئ.
- $\tan A$ په لاس راوړئ، د $\overline{AB}$ د مستقیمې کرښې له میل سره څه اړیکه لري؟
- د $\overline{AB}$ په مستقیم دوه اختیاري ټکي په پام کې ونیسئ، د دې ټکو په لرلوسره د مستقیمې کرښې میل پیدا کړئ. ایا د $\tan B$ د مستقیمې کرښې د میل برابرې لیدل کېږي؟

له پورتني فعالیت څخه لیدل کېږي چې د هغې مستقیمې کرښې میل چې د x له محور سره حاده زاویه جوړوي، د هغې زاویې له تانجنت سره چې د کرښې او د x محور مثبت جهت سره یې جوړوي، برابره ده. د $y = mx + h$ معادله کې $m = \tan A$ دي.

لومړی مثال: د Δ مستقیمه کرښه، د y محور په 4 کې پرېکوي او د x محور له مثبت لوري سره 45^o زاویه جوړوي، که $\tan 45^o = 1$ وي، د Δ مستقیمې کرښې معادله ولیکئ؟

حل: پوهېږو چې د مستقیمې کرښې معادله $y = mx + h$ ده، نو لومړی د مستقیمې کرښې میل په لاس راوړو:



$$\left.\begin{array}{l} m = \tan\theta \\ m = \tan 45^o \\ m = 1 \\ h = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y = mx + h \\ y = x + 4 \end{array}$$

دويم مثال: د $\sqrt{3}y - x = 2\sqrt{3}$ مستقيمې کرښې په معادله کې د مستقيمې کرښې ميل، د ميل زاويه او د y له محور سره د تقاطع ټکي په لاس راوړئ؟

حل: لومړی د مستقيمې کرښې معادله، په ستندرد شکل $y = mx + h$ بدلوو چې وروسته يې ميل او له محور سره د تقاطع ټکي، په آسانۍ سره پيداکولای شو.

$$\sqrt{3}\,y - x = 2\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3}\,y = x + 2\sqrt{3} \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + 2$$

$$m = \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \theta = 30^\circ \qquad , \qquad h = 2$$

آيا کولای شئ د فيثاغورث د قضيې او مثلثات ترمنځ اړيکه پيدا کړئ.

فعاليت

- د $\overset{\Delta}{ABC}$ يو قايم الزاويه مثلث چې قايمې جوړوونکې ضلعې يې 6 او 8 دي رسم او قايمه زاويه يې په A وښيئ؟
- $\sin B$, $\cos B$, $(\sin B)^2$, $(\cos B)^2$ او $(\sin B)^2 + (\cos B)^2$ حساب کړئ؟
- $\sin B$, $\cos B$, $(\sin B)^2$, $(\cos B)^2$ او $(\sin B)^2 + (\cos B)^2$ د AC, AB او BC اضلاعو له جنسه وليکئ، څه پايله ترې اخلئ.

له پورتني فعاليت څخه ښکاري چې د يوې حاده زاويې د ساين او کوساين د مربعاتو جمع، مساوي له 1 سره ده. $(\sin A)^2 + (\cos A)^2 = 1$

ځينې وخت د مثلثاتي نسبت د توان علامه په لاندې ډول سره ښودل کيږي.

$$(\sin A)^2 = \sin^2 A$$

پاملرنه وکړئ، چې د 2 توان د زاويې په ساين پورې اړه لري، نه په زاويه يې پورې

$$\sin A^2 \neq \sin^2 A$$

پوښتنې

1- د هغې مستقيمې کرښې معادله په لاس راوړئ چې د x محور له مثبت جهت سره 60^o زاويه جوړه کړي اود y محور په $(0,5)$ ټکي کې قطع کړي.

2- د $y = x + 4$ کرښې په معادله کې، ميل، د ميل زاويه او د y له محور سره د تقاطع ټکي پيدا کړئ.

3- ثبوت يې کړئ:

a) $\dfrac{(\sin\theta + \cos\theta)^2}{1 + 2\sin\theta\cos\theta} = 1$

b) $1 + \left(\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2 = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

c) $\dfrac{\tan^2\theta - \sin^2\theta}{\cos\theta} = \sin\theta \times \tan^3\theta$

d) $\dfrac{(\sin A + \cos A)^2 - 1}{2\sin A} = \cos A$

e) $\sin^4 A + \cos^2 A \times \sin^2 A + \cos^2 A = 1$



مثلثاتي جدول او د هغه استعمال

د مخامخ شکل په مثلثاتي دايرې کې،
د نومورو زاويو مثلثاتي نسبتونه ښودلای
شئ؟

فعاليت

- يو متساوي الاضلاع مثلث رسم کړئ او د هرې زاويې پراخوالی يې وټاکئ؟
- په يو مثلث کې، د 30° او 60° زاويو مثلثاتي نسبتونه پيداکړئ؟
- د زاويې مثلثاتي نسبتونه، په يوه مثلث کې وټاکئ؟
- ايا د هرې زاويې مثلثاتي نسبتونه په پورتني شکل کې پيداکولای شو؟

د پورتني فعاليت پايله داسې بيانوو:

پايله:

د ځينوزاويو مثلثاتي نسبتونه کولای شو، په آسانی سره په لاس راوړو، خو د يو شمېر نورو زاويو د مثلثاتي نسبتونو محاسبه، گران کار دی، نو ددې کار لپاره، د ځينو پوهانو له خوا مثلثاتي جدولونه، د خاصو فورمولونو په واسطه جوړ شوي چې ددې ډول جدول په مرسته، د هرې زاويې مثلثاتي نسبتونه پيداکولای شو.

د يادونې وړ ده چې د جدول په ترتيب کې په يوه قايم الزاويه مثلث کې، د θ او $(\frac{\pi}{2}-\theta)$ يا $(90-\theta)$ زاويو له اړيکو څخه گټه اخيستل شوې ده.

مثلثاتي جدول:

θ	Sin θ	Cos θ	Tan θ	Cot θ	
0° 00′	0.0000	1.0000	0.0000	∞	90° 00′
10	0.0029	1.0000	0.0029	343.77	50
20	0.0058	1.0000	0.0058	171.89	40
30	0.0087	1.0000	0.0087	114.59	30
40	0.0116	0.9999	0.0116	85.940	20
50	0.0145	0.9999	0.0145	68.750	10
1° 00′	0.0175	0.9998	0.0175	57.290	89° 00′
10	0.0204	0.9998	0.0204	49.104	50
20	0.0233	0.9997	0.0233	42.964	40
30	0.0262	0.9997	0.0262	38.188	30
40	0.0291	0.9996	0.0291	34.368	20
50	0.0320	0.9995	0.0320	31.242	10
2° 00′	0.0349	0.9994	0.0349	28.636	88° 00′
10	0.0378	0.9993	0.0378	26.432	50
20	0.0407	0.9992	0.0407	24.542	40
30	0.0436	0.9990	0.0437	22.904	30
40	0.0465	0.9989	0.0466	21.470	20
50	0.0494	0.9988	0.0495	20.206	10
3° 00′	0.0523	0.9986	0.0524	19.081	87° 00′
10	0.0552	0.9985	0.0553	18.075	50
20	0.0581	0.9983	0.0582	17.169	40
30	0.0610	0.9981	0.0612	16.350	30
40	0.0640	0.9980	0.0641	15.605	20
50	0.0669	0.9978	0.0670	14.924	10
4° 00′	0.0698	0.9976	0.0699	14.301	86° 00′
10	0.0727	0.9974	0.0729	13.727	50
20	0.0756	0.9971	0.0758	13.197	40
30	0.0785	0.9969	0.0787	12.706	30
40	0.0814	0.9967	0.0816	12.251	20
50	0.0843	0.9964	0.0846	11.826	10
5° 00′	0.0872	0.9962	0.0875	11.430	85° 00′
10	0.0901	0.9959	0.0904	11.059	50
20	0.0929	0.9957	0.0934	10.712	40
30	0.0958	0.9954	0.0963	10.385	30
40	0.0987	0.9951	0.0992	10.078	20
50	0.1016	0.9948	0.1022	9.7882	10
	Cos θ	Sin θ	Cot θ	Tan θ	θ

θ	Sin θ	Cos θ	Tan θ	Cot θ	
6° 00′	0.1045	0.9945	0.1051	9.5144	**84°** 00′
10	0.1074	0.9942	0.1080	9.2553	50
20	0.1103	0.9939	0.1110	9.0098	40
30	0.1132	0.9936	0.1139	8.7769	30
40	0.1161	0.9932	0.1169	8.5555	20
50	0.1190	0.9929	0.1198	8.3450	10
7° 00′	0.1219	0.9925	0.1228	8.1443	**83°** 00′
10	0.1248	0.9922	0.1257	7.9530	50
20	0.1276	0.9918	0.1287	7.7704	40
30′	0.1305	0.9914	0.1317	7.5958	30′
40	0.1334	0.9911	0.1346	7.4287	20
50	0.1363	0.9907	0.1376	7.2687	10
8° 00′	0.1392	0.9903	0.1405	7.1154	**82°** 00′
10	0.1421	0.9899	0.1435	6.9682	50
20	0.1449	0.9894	0.1465	6.8269	40
30	0.1478	0.9890	0.1495	6.6912	30
40	0.1507	0.9886	0.1524	6.5606	20
50	0.1536	0.9881	0.1554	6.4348	10
9° 00′	0.1564	0.9877	0.1584	6.3138	**81°** 00′
10	0.1593	0.9872	0.1614	6.1970	50
20	0.1622	0.9868	0.1644	6.0844	40
30	0.1650	0.9863	0.1673	5.9758	30
40	0.1679	0.9858	0.1703	5.8708	20
50	0.1708	0.9853	0.1733	5.7694	10
10° 00′	0.1736	0.9848	0.1763	5.6713	**80°** 00′
10	0.1765	0.9843	0.1793	5.5764	50
20	0.1794	0.9838	0.1823	5.4845	40
30	0.1822	0.9833	0.1853	5.3955	30
40	0.1851	0.9827	0.1883	5.3093	20
50	0.1880	0.9822	0.1914	5.2257	10
11° 00′	0.1908	0.9816	0.1944	5.1446	**79°** 00′
10	0.1937	0.9811	0.1974	5.0658	50
20	0.1965	0.9805	0.2004	4.9894	40
30	0.1994	0.9799	0.2035	4.9152	30
40	0.2022	0.9793	0.2065	4.8430	20
50	0.2051	0.9787	0.2095	4.7729	10
	Cos θ	Sin θ	Cot θ	Tan θ	θ

θ	Sin θ	Cos θ	Tan θ	Cot θ	
12° 00′	0.2079	0.9781	0.2126	4.7046	**78°** 00′
10	0.2108	0.9775	0.2156	4.6382	50
20	0.2136	0.9769	0.2186	4.5736	40
30	0.2164	0.9763	0.2217	4.5107	30
40	0.2193	0.9757	0.2247	4.4494	20
50	0.2221	0.9750	0.2278	4.3897	10
13° 00′	0.2250	0.9744	0.2309	4.3315	**77°** 00′
10	0.2278	0.9737	0.2339	4.2747	50
20	0.2306	0.9730	0.2370	4.2193	40
30	0.2334	0.9724	0.2401	4.1653	30
40	0.2363	0.9717	0.2432	4.1126	20
50	0.2391	0.9710	0.2462	4.0611	10
14° 00′	0.2419	0.9703	0.2493	4.0108	**76°** 00′
10	0.2447	0.9696	0.2524	3.9617	50
20	0.2476	0.9689	0.2555	3.9136	40
30	0.2504	0.9681	0.2586	3.8667	30
40	0.2532	0.9674	0.2617	3.8208	20
50	0.2560	0.9667	0.2648	3.7760	10
15° 00′	0.2588	0.9659	0.2679	3.7321	**75°** 00′
10	0.2616	0.9652	0.2711	3.6891	50
20	0.2644	0.9644	0.2742	3.6470	40
30	0.2672	0.9636	0.2773	3.6059	30
40	0.2700	0.9628	0.2805	3.5656	20
50	0.2728	0.9621	0.2836	3.5261	10
16° 00′	0.2756	0.9613	0.2867	3.4874	**74°** 00′
10	0.2784	0.9605	0.2899	3.4495	50
20	0.2812	0.9596	0.2931	3.4124	40
30	0.2840	0.9588	0.2962	3.3759	30
40	0.2868	0.9580	0.2994	3.3402	20
50	0.2896	0.9572	0.3026	3.3052	10
17° 00′	0.2924	0.9563	0.3057	3.2709	**73°** 00′
10	0.2952	0.9555	0.3089	3.2371	50
20	0.2979	0.9546	0.3121	3.2041	40
30	0.3007	0.9537	0.3153	3.1716	30
40	0.3035	0.9528	0.3185	3.1397	20
50	0.3062	0.9520	0.3217	3.1084	10
18° 00′	0.3090	0.9511	0.3249	3.0777	**72°** 00′
10	0.3118	0.9502	0.3281	3.0475	50
20	0.3145	0.9492	0.3314	3.0178	40
30	0.3173	0.9483	0.3346	2.9887	30
40	0.3201	0.9474	0.3378	2.9600	20
50	0.3228	0.9465	0.3411	2.9319	10
19° 00′	0.3256	0.9455	0.3443	2.9042	**71°** 00′
10	0.3283	0.9446	0.3476	2.8770	50
20	0.3311	0.9436	0.3508	2.8502	40
30	0.3338	0.9426	0.3541	2.8239	30
40	0.3365	0.9417	0.3574	2.7980	20
50	0.3393	0.9407	0.3607	2.7725	10
20° 00′	0.3420	0.9397	0.3640	2.7475	**70°** 00′
10	0.3448	0.9387	0.3673	2.7228	50
20	0.3475	0.9377	0.3706	2.6985	40
30	0.3502	0.9367	0.3739	2.6746	30
40	0.3529	0.9356	0.3772	2.6511	20
50	0.3557	0.9346	0.3805	2.6279	10
21° 00′	0.3584	0.9336	0.3839	2.6051	**69°** 00′
10	0.3611	0.9325	0.3872	2.5826	50
20	0.3638	0.9315	0.3906	2.5605	40
30	0.3665	0.9304	0.3939	2.5386	30
40	0.3692	0.9293	0.3973	2.5172	20
50	0.3719	0.9283	0.4006	2.4960	10
22° 00′	0.3746	0.9272	0.4040	2.4751	**68°** 00′
10	0.3773	0.9261	0.4074	2.4545	50
20	0.3800	0.9250	0.4108	2.4342	40
30	0.3827	0.9239	0.4142	2.4142	30
30′	0.3827	0.9239	0.4142	2.4142	30′
40	0.3854	0.9228	0.4176	2.3945	20
50	0.3881	0.9216	0.4210	2.3750	10
	Cos θ	Sin θ	Cot θ	Tan θ	θ

θ	Sin θ	Cos θ	Tan θ	Cot θ	
23° 00'	0.3907	0.9205	0.4245	2.3559	67° 00'
10	0.3934	0.9194	0.4279	2.3369	50
20	0.3961	0.9182	0.4314	2.3183	40
30	0.3987	0.9171	0.4348	2.2998	30
40	0.4014	0.9159	0.4383	2.2817	20
50	0.4041	0.9147	0.4417	2.2637	10
24° 00'	0.4067	0.9135	0.4452	2.2460	66° 00'
10	0.4094	0.9124	0.4487	2.2286	50
20	0.4120	0.9112	0.4522	2.2113	40
30	0.4147	0.9100	0.4557	2.1943	30
40	0.4173	0.9088	0.4592	2.1775	20
50	0.4200	0.9075	0.4628	2.1609	10
25° 00'	0.4226	0.9063	0.4663	2.1445	65° 00'
10	0.4253	0.9051	0.4699	2.1283	50
20	0.4279	0.9038	0.4734	2.1123	40
30	0.4305	0.9026	0.4770	2.0965	30
40	0.4331	0.9013	0.4806	2.0809	20
50	0.4358	0.9001	0.4841	2.0655	10
26° 00'	0.4384	0.8988	0.4877	2.0503	64° 00'
10	0.4410	0.8975	0.4913	2.0353	50
20	0.4436	0.8962	0.4950	2.0204	40
30	0.4462	0.8949	0.4986	2.0057	30
40	0.4488	0.8936	0.5022	1.9912	20
50	0.4514	0.8923	0.5059	1.9768	10
27° 00'	0.4540	0.8910	0.5095	1.9626	63° 00'
10	0.4566	0.8897	0.5132	1.9486	50
20	0.4592	0.8884	0.5169	1.9347	40
30	0.4617	0.8870	0.5206	1.9210	30
40	0.4643	0.8857	0.5243	1.9074	20
50	0.4669	0.8843	0.5280	1.8940	10
28° 00'	0.4695	0.8829	0.5317	1.8807	62° 00'
10	0.4720	0.8816	0.5354	1.8676	50
20	0.4746	0.8802	0.5392	1.8546	40
30	0.4772	0.8788	0.5430	1.8418	30
40	0.4797	0.8774	0.5467	1.8291	20
50	0.4823	0.8760	0.5505	1.8165	10
29° 00'	0.4848	0.8746	0.5543	1.8040	61° 00'
10	0.4874	0.8732	0.5581	1.7917	50
20	0.4899	0.8718	0.5619	1.7796	40
30	0.4924	0.8704	0.5658	1.7675	30
40	0.4950	0.8689	0.5696	1.7556	20
50	0.4975	0.8675	0.5735	1.7437	10
30° 00'	0.5000	0.8660	0.5774	1.7321	60° 00'
10	0.5025	0.8646	0.5812	1.7205	50
20	0.5050	0.8631	0.5851	1.7090	40
30	0.5075	0.8616	0.5890	1.6977	30
40	0.5100	0.8601	0.5930	1.6864	20
50	0.5125	0.8587	0.5969	1.6753	10
31° 00'	0.5150	0.8572	0.6009	1.6643	59° 00'
10	0.5175	0.8557	0.6048	1.6534	50
20	0.5200	0.8542	0.6088	1.6426	40
30	0.5225	0.8526	0.6128	1.6319	30
40	0.5250	0.8511	0.6168	1.6212	20
50	0.5275	0.8496	0.6208	1.6107	10
32° 00'	0.5299	0.8480	0.6249	1.6003	58° 00'
10	0.5324	0.8465	0.6289	1.5900	50
20	0.5348	0.8450	0.6330	1.5798	40
30	0.5373	0.8434	0.6371	1.5697	30
40	0.5398	0.8418	0.6412	1.5597	20
50	0.5422	0.8403	0.6453	1.5497	10
33° 00'	0.5446	0.8387	0.6494	1.5399	57° 00'
10	0.5471	0.8371	0.6536	1.5301	50
20	0.5495	0.8355	0.6577	1.5204	40
30	0.5519	0.8339	0.6619	1.5108	30
40	0.5544	0.8323	0.6661	1.5013	20
50	0.5568	0.8307	0.6703	1.4919	10
	Cos θ	Sin θ	Cot θ	Tan θ	θ

θ	Sin θ	Cos θ	Tan θ	Cot θ	
34° 00′	0.5592	0.8290	0.6745	1.4826	56° 00′
10	0.5616	0.8274	0.6787	1.4733	50
20	0.5640	0.8258	0.6830	1.4641	40
30	0.5664	0.8241	0.6873	1.4550	30
40	0.5688	0.8225	0.6916	1.4460	20
50	0.5712	0.8208	0.6959	1.4370	10
35° 00′	0.5736	0.8192	0.7002	1.4281	55° 00′
10	0.5760	0.8175	0.7046	1.4193	50
20	0.5783	0.8158	0.7089	1.4106	40
30	0.5807	0.8141	0.7133	1.4019	30
40	0.5831	0.8124	0.7177	1.3934	20
50	0.5854	0.8107	0.7221	1.3848	10
36° 00′	0.5878	0.8090	0.7265	1.3764	54° 00′
10	0.5901	0.8073	0.7310	1.3680	50
20	0.5925	0.8056	0.7355	1.3597	40
30	0.5948	0.8039	0.7400	1.3514	30
40	0.5972	0.8021	0.7445	1.3432	20
50	0.5995	0.8004	0.7490	1.3351	10
37° 00′	0.6018	0.7986	0.7536	1.3270	53° 00′
10	0.6041	0.7969	0.7581	1.3190	50
20	0.6065	0.7951	0.7627	1.3111	40
30	0.6088	0.7934	0.7673	1.3032	30
40	0.6111	0.7916	0.7720	1.2954	20
50	0.6134	0.7898	0.7766	1.2876	10
38° 00′	0.6157	0.7880	0.7813	1.2799	52° 00′
10	0.6180	0.7862	0.7860	1.2723	50
20	0.6202	0.7844	0.7907	1.2647	40
30	0.6225	0.7826	0.7954	1.2572	30
40	0.6248	0.7808	0.8002	1.2497	20
50	0.6271	0.7790	0.8050	1.2423	10
39° 00′	0.6293	0.7771	0.8098	1.2349	51° 00′
10	0.6316	0.7753	0.8146	1.2276	50
20	0.6338	0.7735	0.8195	1.2203	40
30	0.6361	0.7716	0.8243	1.2131	30
40	0.6383	0.7698	0.8292	1.2059	20
50	0.6406	0.7679	0.8342	1.1988	10
40° 00′	0.6428	0.7660	0.8391	1.1918	50° 00′
10	0.6450	0.7642	0.8441	1.1847	50
20	0.6472	0.7623	0.8491	1.1778	40
30	0.6494	0.7604	0.8541	1.1708	30
40	0.6517	0.7585	0.8591	1.1640	20
50	0.6539	0.7566	0.8642	1.1571	10
41° 00′	0.6561	0.7547	0.8693	1.1504	49° 00′
10	0.6583	0.7528	0.8744	1.1436	50
20	0.6604	0.7509	0.8796	1.1369	40
30	0.6626	0.7490	0.8847	1.1303	30
40	0.6648	0.7470	0.8899	1.1237	20
50	0.6670	0.7451	0.8952	1.1171	10
42° 00′	0.6691	0.7431	0.9004	1.1106	48° 00′
10	0.6713	0.7412	0.9057	1.1041	50
20	0.6734	0.7392	0.9110	1.0977	40
30	0.6756	0.7373	0.9163	1.0913	30
40	0.6777	0.7353	0.9217	1.0850	20
50	0.6799	0.7333	0.9271	1.0786	10
43° 00′	0.6820	0.7314	0.9325	1.0724	47° 00′
10	0.6841	0.7294	0.9380	1.0661	50
20	0.6862	0.7274	0.9435	1.0599	40
30	0.6884	0.7254	0.9490	1.0538	30
40	0.6905	0.7234	0.9545	1.0477	20
50	0.6926	0.7214	0.9601	1.0416	10
44° 00′	0.6947	0.7193	0.9657	1.0355	46° 00′
10	0.6967	0.7173	0.9713	1.0295	50
20	0.6988	0.7153	0.9770	1.0235	40
30	0.7009	0.7133	0.9827	1.0176	30
40	0.7030	0.7112	0.9884	1.0117	20
50	0.7050	0.7092	0.9942	1.0058	10
45° 00′	0.7071	0.7071	1.0000	1.0000	45° 00′
	Cos θ	Sin θ	Cot θ	Tan θ	θ

فعالیت

- د جدول لومړۍ پرته لیکه یا سطر او ولاړه لیکه یا ستون څه راښیي؟
- د جدول د کینې او ښۍ خوا لومړۍ ولاړه لیکه یا ستون په کومه زاویه پیل او په کومه زاویه ختم شوې دی؟
- د جدول لومړۍ او وروستۍ کرښه څه را ښیي؟
- که یوه زاویه 45° او یا له هغه څخه کوچنۍ وي، هغه د جدول په کینه خوا کې د درجې په ستونو کې پیدا کوو او مثلثاتي نسبت یې، له پورته خوا څخه لولو یا له ښکته خوا څخه او که زاویه له 45° څخه لویه وي، څه کوو؟

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

که زاویه له 45° څخه کوچنۍ وي، هغه دجدول د کینې خوا په لومړۍ ولاړه لیکه یا ستون کې او مثلثاتي نسبت یې، په پورته خوا لومړۍ پرته لیکه یا سطر کې ګورو.

که زاویه له 45° څخه لویه وي، هغه زاویه د جدول د ښۍ خوا په لومړۍ ولاړه لیکه یا ستون کې او مثلثاتي نسبت یې له ښکته خوا څخه پورته خوا ته په وروستنۍ پرته لیکه یا سطر کې پیداکوو چې د پام وړ زاویې د اړوند کرښې او د مثلثاتي نسبت د اړوندې ولاړې لیکې یا ستون تقاطع د زاویې مطلوب نسبت راکوي.

لومړی مثال: د $30^\circ\ 10'$ کوساین پیدا کړئ.

حل: لومړی د جدول له کینې خوا څخه په لومړۍ ولاړه لیکه یا ستون کې مطلوبه زاویه $(30^\circ 10')$ پیدا کوو او د جدول په لومړۍ کرښه(سطر) کې مطلوب مثلثاتي نسبت پیدا کوو، ددې ولاړې او پرتې لیکې(سطر اوستون) تقاطع، د $0{,}8646$ عدد راکوي چې دا د $(30^\circ 10')$ زاویې کوساین دی.

$$\cos(30^\circ 10') = ? \qquad 30^\circ 10' \cdots\cdots 0{,}8646 \quad (\cos)$$

دویم مثال : د $84^\circ\ 50'$ ساین وټاکئ؟

حل: لومړی د جدول د ښۍ خوا په لومړي ستون کې د پام وړ زاویه $84^\circ\ 50'$ پیداکوو او د جدول په وروستنۍ کرښه(سطر) کې د پام وړ مثلثاتي نسبت پیداکوو، ددې پرتې او ولاړو لیکو(سطر او ستون) تقاطع، د $(0{,}9959)$ عدد راکوي چې د $84^\circ\ 50'$ زاویه کوساین دی.

$$\sin 84^\circ 50' = ? \qquad 0.9959 \cdots\cdots 84^\circ 50' \quad (\sin)$$

يادونه

هغه جدول چې تر اوسه مو ترې کار واخیست د هغو زاویو مثلثاتي نسبتونه چې توپیر یې لس دقیقې وي، راښيي د هرې زاویې مثلثاتي نسبت د دې جدول په مرسته نه شو ټاکلی، نو اوس غواړو داسې طریقه بیان کړو، چې ددې جدول په مرسته د هرې زاویې مثلثاتي نسبتونه په لاس راوړو، چې دا طریقه د انټرپولیشن Interpolation په نامه یادېږي او په لاندې مثالونوکې یې ترې کار اخلو:

دریم مثال: د $\tan 42^\circ 35'$ زاویې تانجنت په لاس راوړئ.

حل: په جدول کې د $42^\circ 35'$ زاویې تانجنت نشته، خو د $42^\circ 40'$ او $42^\circ 30'$ زاویو تانجانتونه شته دي چې د هغوی په مرسته $42^\circ 35'$ زاویې مثلثاتي نسبت داسې پیداکوو:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\tan 42^\circ 40' \\ \tan 42^\circ 35'\end{array}\right]5 \\ \\ \tan 42^\circ 30'\end{array}\right]10 \qquad \begin{array}{l} = 0{,}9217\,]\;x \\ \quad\;\; x \\ = 0{,}9163\end{array}\Bigg]0{,}0054$$

د مثلثاتي نسبتونو توپیر		د دو زاویو توپیر
0.00054	:	10'
x	:	5'

لیدل کېږي چې د لومړی او دویمې زاویې توپیر 5 او د لومړی او دریمې زاویې توپیر، 10 دی. په همدې ترتیب سره، د tan توپیر یې x او 0,0054 دی. یعنې که زاویه د 10 په اندازه توپیر ولري، نو tan یې د 0,0054 په اندازه فرق کوي او که زاویه د 5 په اندازه توپیر وکړي، نو tan د x په اندازه توپیر کوي چې د تناسب په مرسته لیکو:

$$\frac{5}{10} = \frac{x}{0{,}0054} \Rightarrow x = 0{,}0027$$

د x قیمت د کوچنۍ زاویو له tan سره جمع کوو:

$$0{,}9163 + 0{,}0027 = 0{,}9190$$

$$\tan 42^\circ 35' = 0{,}9190$$

پوښتنې

له مثلثاتي جدول څخه په ګټې اخیستنې سره د $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ مثلثاتي نسبونه د $\alpha = 35^\circ 20'$ او $\alpha = 75^\circ 10'$ زاویو پیدا کړئ.

د قايم الزاويو مثلثونو حل



مخامخ شکل ته پام وکړئ، د خلي(منار) جګوالی څنګه پیدا کولای شئ؟

فعالیت

• که د یوه قایم الزاویه مثلث یوه زاویه '40 °30 وي، بله زاویه یې پیدا کړئ.

•که د یوه قایم الزاویه مثلث یوه زاویه °29 او وتر یې $25cm$ وي، د مثلث مجهول عناصر پیدا کړئ.

•که د قایم الزاویه مثلث دوې ضلعې یا یوه ضلعه او یوه حاده زاویه یې معلومه وي، د مثلث نور عناصر څنګه پیدا کولای شو؟

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

په هر قایم الزاویه مثلث کې که یوه حاده زاویه یا دوه ضلعې معلومې وي، د مثلث پاتې اجزاوې د مثلثاتي توابعو په مرسته په لاس راوړو.

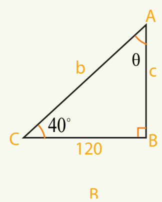
مثال: دیوه قایمه الزاویه مثلث یوه حاده زاویه، °40 ، که ددې زاویې مجاوره ضلعه، 120 واحده د اوږوالي وي، نوموړی مثلث حل کړئ؟

حل: څرنګه چې د مثلث یوه زاویه او دوه ضلعې نا معلومې وي، نو ددې معلومو اجزاوو په مرسته، نا معلومې اجزاوې په لاندې ډول په لاس راوړو:

$$1,\quad \theta = 90^\circ - \hat{c} = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$$

$$2,\quad \tan 40^\circ = \frac{c}{120} \Rightarrow c = 120\tan 40^\circ = 120\cdot 0{,}8391 = 100{,}692$$

$$3,\quad \cos 40^\circ = \frac{120}{b} \Rightarrow b = \frac{120}{\cos 40^\circ} = \frac{120}{0{,}7660} = 156.6579$$



دويم مثال: د يوه قايمه الزاويه مثلث وتر $49.7cm$ او يوه قايمه ضلعه يې $25cm$ وي نوموړی مثلث حل کړئ.

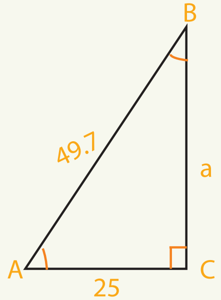
حل: ليدل کېږي چې د مثلث دوه عناصر معلوم وي، نو نا معلوم عناصر يې داسې پيدا کوو:

$$1)\cos\hat{A} = \frac{25}{49,7} = 0,503$$

$$\cos\hat{A} = 0,503 \quad \Rightarrow \hat{A} = 59,8^\circ = 59^\circ,48'$$

$$2)B = 90^\circ - \hat{A} \quad \Rightarrow B = 90 - 59,8^\circ = 30,2^\circ = 30^\circ 12'$$

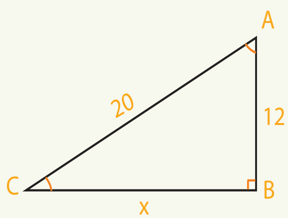
$$3)\tan\hat{A} = \frac{a}{25} \quad \Rightarrow a = \tan\hat{A} \cdot 25 = 25 \cdot 1,7182 = 43$$



پوښتنې

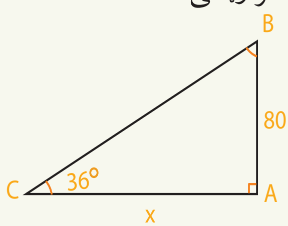
1 - د يوه قايمه الزاويه مثلث يوه حاده زاويه $38^\circ\ 50'$ او د دې زاويې مجا وره ضلعه 311 واحده ده، نو موړی مثلث حل کړئ.

2 - په لاندې شکلونو کې مجهول عناصر وټاکئ.



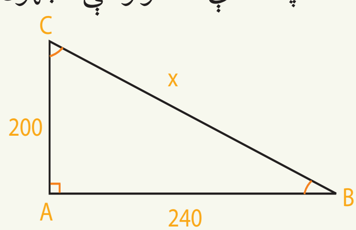
$x = ?$

$\hat{A} = ?$



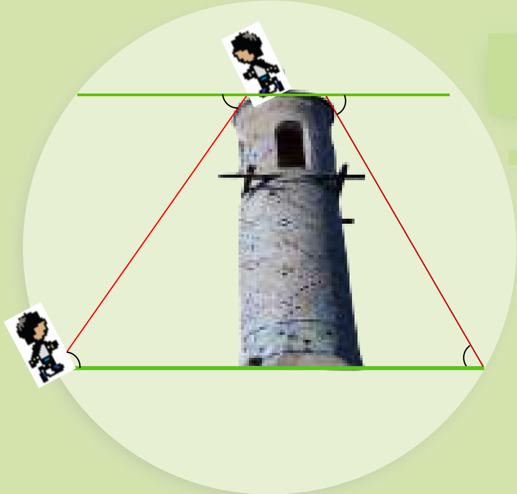
$x = ?$

$\hat{B} = ?$



$\hat{B} = ?$

$\overline{BC} = ?$



د میل یا ارتفاع او تنزیل زاویې

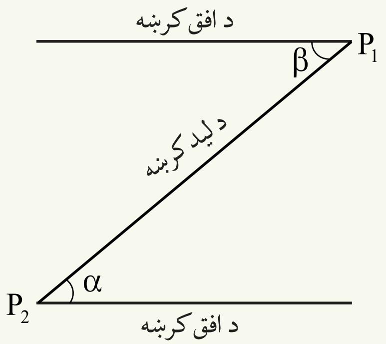
مخامخ شکل ته پام وکړئ، د میل
او تنزیل زاویې وښایاست؟

فعالیت

• که احمد په یو جګوالی پروت وي، د لید کرښه له افقي سطحې سره، څه ډول زاویه جوړوي او دا زاویه په کوم نوم یا دېږي(د تحول ساحه یې کومه فاصله ده) ؟
• که یو شی په یوه ښکته ځای کې پروت وي، د لید کرښه له افقي سطحې سره څه ډول زاویه جوړوي او دا زاویه په کوم نامه یادېږي(د تحول ساحه یې په کومه فاصله ده) ؟

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

1 - **د ارتفاع زاویه** (Angle of Elevation)
که یو شی په یوه ارتفاع پروت وي، نو دلید کرښه له افق سره یوه زاویه جوړوي چې د جګوالي زاویه بلل کېږي، لکه: په ورکړل شوي شکل کې د α زاویه.

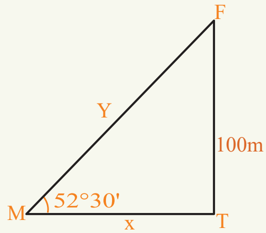


2 - **د تنزیل زاویه** (Angle of Depression)
که یو شی په ټیټ ځای کې پروت وي، د لید کرښه له شي سره یوه زاویه جوړوي چې د تنزیل زاویه بلل کېږي لکه په شکل کې د β زاویه.

لومړی مثال: د $\overset{\Delta}{MTF}$ قایم الزاویه مثلث کې ارتفاع زاویه $52^\circ\ 30'$ ده که د مثلث جګوالی $100m$ وي، د مثلث وتر او قاعده یې پیدا کړئ.

$$\tan 52^\circ 30' = \frac{\overline{TF}}{\overline{MF}} = \frac{100}{X}$$

$$X = \frac{100}{\tan 52^\circ 30'} = \frac{100}{1.3092} \Rightarrow X = 76.73m$$



x

$$Sin 52^\circ 30' = \frac{\overline{TF}}{\overline{MF}} = \frac{100}{y}$$

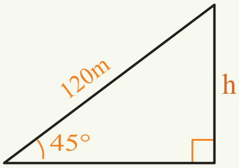
$$y = \frac{100}{Sin 52^\circ 30'} = \frac{100}{0,7934} \Rightarrow y = 126,04$$

دویم مثال: د یوه کاغذ پران د تار اوږد دوالی $120m$ وي، ددې کاغذ پران د جګوالي یا ارتفاع زاویه 45° ده، د کاغذ پران(پتنګ) جګوالی وټاکئ.

$$Sin 45^\circ = \frac{h}{120}$$

$$h = 120.\frac{\sqrt{2}}{2}$$

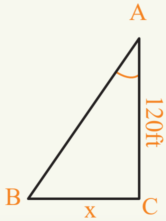
$$h = 60\sqrt{2}m$$



دریم مثال: یو نوري(ترسد) برج له سمندر څخه $120f$ جګوالی لري، هغه نزولي زاویه چې د برج نه یوه کښتۍ لیدل کیږي، 15° درجې ده، نوموړي کښتۍ له برج څخه څومره واټن لري؟

$$\tan 30^\circ = \frac{X}{120}$$

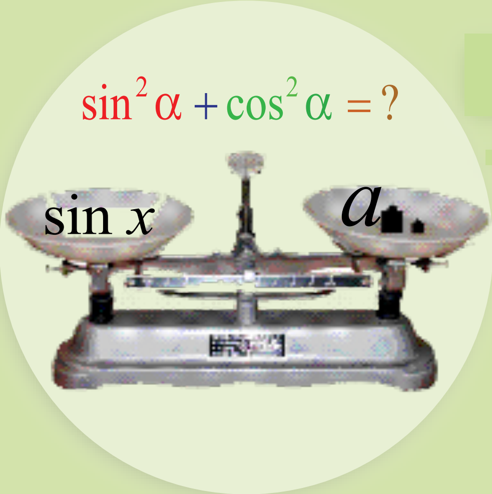
$$X = 120.\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = 40\sqrt{3}ft$$



پوښتنې

1- د هغې ونې ارتفاع پیدا کړئ چې د ارتفاع زاویه یې له 20° څخه 40° واوړي، نو په هغه حالت کې به لیدونکی $75\,ft$ ونې ته نژدې شي.

2- یوه ونه باد له پورته خواڅخه داسې ماته کړې چې د ونې تنه او ماته برخه یې یو قایم الزاویه مثلث له ځمکې سره جوړه کړې، که ماته برخه له ځمکې سره 50° زاویه جوړه کړې وي او د ونې تنه $20\,ft$ وي، د ونې جګوالي پیدا کړئ.



مثلثاتي معادلې

مخامخ مثلثاتي اړیکې له څه سره مساوي دي؟ روښانه یې کړئ.

پوهېږو چې مطابقت هغه مساوات دی چې د ټولو قیمتونو د متحول لپاره د مساوات دواړه خواوې سره برابرې شي او معادله هغه مساوات دی چې د متحول د ځینو بیو لپاره، د مساوات دواړه خواوې سره برابرې شي.

فعالیت

- د فیثاغورث د قضیې او مثلثاتو ترمنځ اړیکه وښیئ، آیا دا اړیکه مطابقت دی که معادله؟
- مطابقت او معادله څه تو پیر لري؟ دا توپیر په مثلثاتي اړیکو کې وڅېړئ.
- د $\sin x = 1$ رابطه کې x مجهول دی که $\sin x$

په یوه تعریف کې د پورتني فعالیت پایله په لاندې ډول بیانوو:

تعریف:

هره معادله چې په هغې کې یو یا څو مثلثاتي نسبتونه ګډون ولري مثلثاتي معادله بلل کېږي، لکه: $\sin x - 1 = 0$ یا $2\cos x - 1 = 0$

- هغه قوس یا زاویه چې د هغې مثلثاتي نسبت مطلوب وي، اصلي مجهول بلل کېږي، لکه: په پورتنیو معادلو کې x اصلي مجهول دی.

- د اصلي مجهول مثلثاتي نسبت ته فرعي مجهول وایي، لکه په پورتنیو معادلو کې $\cos x$ او $\sin x$ فرعي مجهول دي.

د مثلثاتي معادلو د حل لپاره په لاندې ډول عمل کوو:

1 - د الجبري معادلو د حل په مرسته د فرعي مجهول قیمت په لاس راوړو.

2- د مثلثاتي نسبتونو د جدول په مرسته د اصلي مجهول قیمت په لاس راوړو.

3- څرنګه چې مثلثاتي معادلې پریوديک معادلې دي چې ډېر حلونه لري، نو د هغو زاويو د فورمولونو په مرسته چې يو ډول نسبتونه لري، د معادلې حلونه دي.

مثال: د $2\sin x-\sqrt{2}=0$ او $\cos x+\frac{1}{2}=1$ مثلثاتي معادلو حلونه پیدا کړئ.

$$\cos x+\frac{1}{2}=1$$
$$\cos x=1-\frac{1}{2}$$
$$\cos x=\frac{1}{2}$$
$$x=30^\circ=\frac{\pi}{6}$$

$$2\sin x-\sqrt{2}=0$$
$$2\sin x=\sqrt{2}$$
$$\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$x=45^\circ=\frac{\pi}{4}$$

پوښتني

د لاندې معادلو حل پیدا کړئ.

$a)\ \sqrt{3}\cot x-1=0$ $b)\ 2\sin 3x+\sqrt{3}=0$ $c)\ 2\cos 4x-\sqrt{2}=0$

د څلورم څپرکي لنډيز:

- مثلثات له دوو يوناني کلمو ټرايګون او متري څخه چې د مثلث د اندازه کولو معنا لري، جوړ شوی دی او له هغه علم څخه عبارت دی چې د مثلث د عناصرو ترمنځ اړيکې څېړي.
- که د مثلث له يوې ضلعې يوه موازي کرښه رسم شي، متقاطع ضلعې په مناسبو ټوټو وېشي چې دا قضيه د تالس د قضيې په نامه يادېږي.
- په هر قايم الزاويه مثلث کې د حاده زاويې د مخامخ ضلعې اوږدوالی، د وتر په اوږدوالي او د حاده زاويې د ساين sine په نامه يادېږي.
- په هر قايم الزاويه مثلث کې د حاده زاويې د ګاونډۍ يا مجاورې ضلعې اوږدوالی، د وتر په اوږدوالي او د حاده زاويې د کوساين cosine په نامه يادېږي.
- په هر قايم الزاويه مثلث کې د حاده زاويې د مخامخ څنډې يا ضلعې اوږدوالی، د ګاونډۍ يا مجاورې څنډې يا ضلعې په اوږدوالي، د حاده زاويې د تانجنت tangent په نامه يادېږي.
- په هر قايم الزاويه مثلث کې د حاده زاويې د $\sin\theta$ او $\cos\theta$ نسبتونو نسبت، د حاده زاويې د $\tan\theta$ په نامه يادېږي $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$.
- په هر قايم الزاويه مثلث کې د حاده زاويې د $\cos$ او $\sin$ نسبتونو نسبت، د حاده زاويې د $\cot$ په نامه يادېږي $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$.
- هغه زاويه، لکه (α) چې مستقيمه کرښه يې د x محور له مثبت جهت سره جوړوي، د ميل زاويې په نامه يادېږي او د دې کرښې ميل د $\tan\alpha$ سره مساوي ده $m = \tan\alpha$.
- په هر قايم الزاويه مثلث کې د $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ اړيکه ريښتيا ده.
- د $\sin x, \cos x$ او $\tan x$ مثلثاتي نسبتونه، له زاويې پرته معنا نه لري.
- د $y = mx + b$ ، m په معادله کې m د هغې زاويې تانجنت دی چې مستقيمه کرښه يې د x محور له مثبت جهت سره جوړوي او h د y له محور سره د تقاطع ټکی دی.
- $Sin30^o$ له $Cos60^o$ سره برابر دی.
- $Cos30^o$ له $\sin 60^o$ سره برابر دی.
- $Cos45^o$ له $Sin45^o$ برابر دی.

د څلورم څپرکی پوښتنې

• د لاندې سوالونو کې هرې پوښتنې لپاره څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب یې په نښه کړئ:

1- د یوې حاده زاویې $\sin\alpha$ عبارت دی له:

a) $\dfrac{\text{د حاده زاویې د مخامخ ضلعې اوږدوالی}}{\text{دوتر اوږدوالی}}$ c) $\dfrac{\text{د حاده زاویې دګاوندي(مجاوري) ضلعې اوږدوالی}}{\text{دوتر اوږدوالی}}$

b) $\dfrac{\text{دوتر اوږدوالی}}{\text{د حاده زاویې دګاوندي(مجاوري) ضلعې اوږدوالی}}$ d) $\dfrac{\text{دوتر اوږدوالی}}{\text{د حاده زاویې د مخامخ ضلعې اوږدوالی}}$

2- د $\tan x$ نسبت مساوي دی، په:

a) $\dfrac{\sin x}{\cos x}$ b) $\dfrac{\cos x}{\sin x}$ c) $\dfrac{1}{\sin x}$ d) $\dfrac{1}{\cos x}$

3- د $2y = 2x - 3$ په معادله کې د مستقیمې کرښې میل عبارت دی، له:

a) $\dfrac{3}{2}$ b) -1 c) 1 d) b او a

4- د هغې مستقیمې کرښې معادله چې د y محور په (۳ ، ۰) کې تقاطع او د x محور له مثبت جهت سره 45^o زاویه جوړه کړي، عبارت ده له:

a) $y = x + 3$ b) $2y = 2x - 3$ c) $2x - y = 0$ d) هیڅ یو

5- د $\sin^2 30 + \cos^2 30$ افادې قیمت مساوي دی، له:

a) 1 b) 2 c) -2 d) -1

6- $\sin 45^o$ او $\cos 45^o$ مساوي دی، له:

a) 1 b) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$ d) $\sqrt{2}$

7- د $\dfrac{\sin 30^o - \cos 60^o}{\cos 60^o + \sin 30^o}$ افادې قیمت عبارت دی له:

a) 0 b) 1 c) -1 d) درې واړه ځوابونه سم دي.

• لاندې تش ځایونه په مناسبو بیانونو سره ډک کړئ:

1- په یوه قایم الزاویه مثلث کې د دوو نورو حاده زاویو مجموعه .... ده.

2- که د یوه متساوي الاضلاع مثلث یوه ځنډه $10cm$ وي، جګوالی یې............... دی.

3- په هر قایمه الزاویه مثلث کې، د یوې حاده زاویې ساین عبارت دی له.......................

4- Triganomitry له دوو کلمو............... او .... څخه جوړه شوې ده.

5- $\tan\theta \cdot \cot\theta$ مساوي په .... دی.

• له لاندې جملو څخه کومه سمه او کومه ناسمه ده، د سمې جملې په مخ کې د (ص) توری او د ناسمې په مخ کې د (غ) توری ولیکئ؟

1- (   ) د $\sin x$ نسبت، مساوي په $\frac{\text{د مخامخ ضلعې اوږدوالی}}{\text{د وتر اوږدوالی}}$ دی.

2- (   ) $\sin 30^o$ او $\cos 60^o$ یو بل سره مساوي دي.

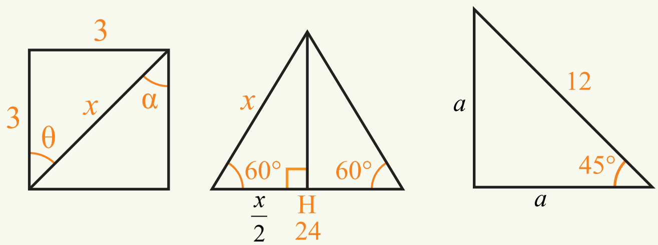
3- (   ) د $2y = 5x - 1$ معادلې کې د دې کرښې میل $\frac{2}{5}$ دی.

4- (   ) د $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ نسبت د $\tan\theta$ سره برابر دی.

5- (   ) $1+\cos^2\theta$ برابر په $\sin^2\theta$ دی.

• لاندې پوښتنې حل کړئ.

1- په لاندې شکلونو کې د ورکړ شوو زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ؟



2- په لاندې پوښتنو کې د A او B قيمتونه حساب کړئ:

1) $A = \cos 30^\circ - \sin 30^\circ$

2) $B = \cos 60^\circ - \sin 30^\circ$

3) $A = \tan 30^\circ - \tan 60^\circ$

4) $B = \cos 60^\circ + \sin 30^\circ$

5) $A = \frac{1}{2}(\tan 45^\circ - \cos 45^\circ)$

6) $B = \tan 45^\circ + \tan 60^\circ$

7) $A = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 60^\circ + \cos 45^\circ)$

8) $B = 2 - \frac{1}{2}(\sin 45^\circ - \cot 45^\circ)$

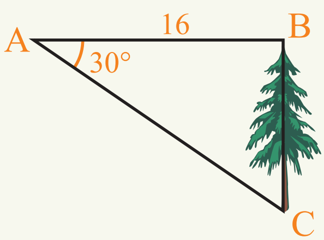
9) $A = \sin 45^\circ + \cos 30^\circ - \tan 45^\circ$

3- که $\sin x = \frac{7}{12}$ وي $\cos x$ او $\tan x$ پيدا کړئ.

4- که $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ وي $\sin x$ او $\tan x$ پيدا کړئ.

5- که چېرې α زاويه، صفر ته نژدې شي، $\tan \alpha$ کوم عدد ته نژدې کېږي؟ د شکل له مخې د خپلې وينا سموالی وښيئ.

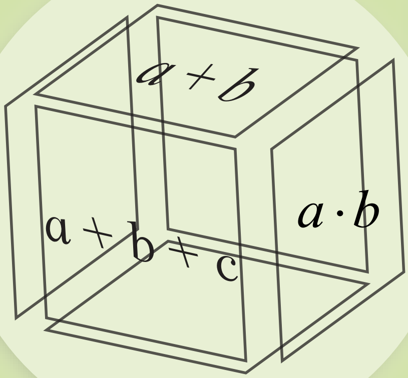
6- په لاندې شکل کې که $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ وي، د $\overline{AC}$ او $\overline{BC}$ واټنونه حساب کړئ.



پنځم څپرکی

څو جمله یي


1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1
1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1
1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1
1 14 91 364 1001 2002 3003 3432 3003 2002 1001 364 91 14 1
1 15 105 455 1365 3003 5005 6435 6435 5005 3003 1365 455 105 15 1
1 16 120 560 1820 4368 8008 11440 12870 11440 8008 4368 1820 560 120 16 1



څوجمله يي ګانې (الجبري افادې)

د مخامخ شکل په سطحو، د ليکل شويو الجبري افادو نمونه واخلئ.

فعاليت

لاندې افادې په پام کې ونيسئ:

$a)\ 2x \qquad b)\ \frac{1}{3}xy^3 \qquad c)\ \sqrt{2}xym^t \qquad d)\ 9x^2$

$e)\ 5x \qquad f)\ 2xy^3 \qquad g)\ 3x^2 \qquad h)\ \frac{4x^2}{x-1}$

- يوبل ته ورته افادې په نښه کړئ.
- لاندې الجبري افادې، تر ممکن حده پورې ساده کړئ.

$a)\ 2x+6x^2+\sqrt{2}xym^4 \qquad b)\ 3x^2+6x^2 \qquad c)\ \frac{1}{3}xy^3+2x \qquad d)\ \frac{1}{3}xy^3+2xy^3$

- هغه افادې چې نه شي ساده کيداى،څنګه بايد وليکل شي، د هرې يوې لپاره د کومو نومونو وړانديزو نه کوئ؟
- په هرحالت کې د افادو تر ټولو لوړ توان، نسبت x ته وټاکئ.

له پورتني فعاليت څخه کولاى شو، وليکوچې:

که چيرې په يوه الجبري افاده کې د مشابه جملو له ساده کولوڅخه وروسته، يوازې يوه جمله ولرئ، هغې ته يوه جمله يي،(Monomial)، که جمع يا تفريق د دووجملوولرو، هغې ته دوه جمله يي يا (Bionomial)، که جمع يا تفريق ددريوجملو لرو، هغې ته دري جمله يي يا (Trinomial) او که له دريوجملوڅخه زياتې جملې ولرو، څوجمله يي يا(Polinomila) په نامه يادېږي. په هره الجبري افاده کې، تر ټولو لوړ توان نسبت يوه ځانګړې متحول ته د الجبري افادې درجه، نظر هغه متحول ته بلل کېږي.

مثال: لاندې جدول بشپړکړئ.

الجبري افادې	مناسبي نوموني				درجه	
	خو جمله یي	دري جمله یي	دوه جمله یي	یوه جمله یي	نظر y ته	نظر x ته
$\sqrt{32}\,y^2 - 3y + 2y^3$						
$3x^2 - 7x$			✓			2
$6x^2 - 4x - 1$						
$0.4x^2y - 2x^4 + 16y^2$						
$13x - 2y^3 + 6x^3y$						
$\frac{2x-4}{x}$						
$3 - 5 + x^2 - y^3 - 2xy$						
$4x^2 - 2x + 6x^2 - 5x$						

پوښتني

1- لاندې الجبري افادې، ساده او د هرې يوې درجه نسبت هرمتحول ته وټاکئ.

$a)\ x^2 - 3x + 6x^2 - \frac{3}{2}x$ $\qquad b)\ \sqrt{2}mn^2 - \frac{1}{2}m + 2\sqrt{2}n^2m + 3m$

$c)\ -4x^2 + 2x^2 + 14x - 8 + 4x^3 - 16x - 2x^2$ $\qquad d)\ 4 - x^3y - 2 + yx^3 - 4xy - 1$

2- لاندې الجبري افادې خوجمله يي دي؟ د هرې يوې درجه نسبت هر متحول ته وټاكئ.

$a)\ 6x^2 - 4x - 12xy^6 - 2x^5$ $\qquad b)\ 8x^6 - 4xy^6 - 5x^2$

$c)\ 6x^2y^6m^9$ $\qquad d)\ \sqrt{3}x - y + 6x^2y^3 - 2y^2$

$e)\ 3pq^3 - 8p^4q^3 - 12q^4 - 0.5p^6$ $\qquad f)\ \frac{4m-2n}{2m-n}$

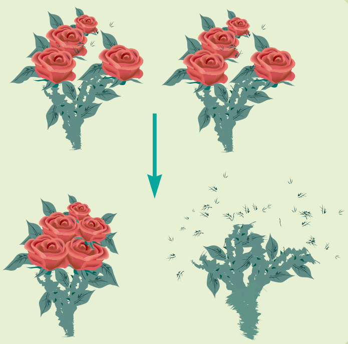
3- د B, A او C په افادوكې ورته حدود وښاياست او افادې ساده كړئ.

$$A = 4xy + 2x^2y - 3xy^2 - \sqrt{2}xy - 0.5x^2y - \frac{1}{2}xy^2$$

$$B = \frac{4}{3}a^2b - a^2 + b^2 - 0.7a^2b - 2a^2 - 3b^2 + xy$$

$$C = 2\sqrt{8x} + \sqrt{2} - 3\sqrt{8x} + \sqrt{32}$$

په فکتورونو تجزیه(فکتور نیونه)



په مخامخ شکل کې څو غونچې ګلونه وینئ؟ کومې غونچې، یو بل ته ورته دي؟ یوه غونچه له څو ګلانو څخه جوړه ده؟

فعالیت

• تش ځایونه ډک کړئ.

$5x = (.......+......)x = ...x + ...x$

$6y = (......+......)y = ...y + ...y$

• په پاسنیو اړیکو کې له کومې ځانګړتیا څخه ګټه اخیستل شوې ده؟

• د ښي اړخ عددي ضریبونه، د کیڼ اړخ د متحولینو له ضریبونوسره څه اړیکه لري؟

$3x + 2x = (........+...........)x = ...x$

$ax + bx = (..........+..........)x = ...x$

• آیا کولای شو چې $a + b$ ساده کړو؟

په پور تني فعالیت کې لیدل کېږي چې:

د ځینوالجبري افادو په تجزیه کې کولای شو چې د ضرب له توزیعي خاصیت څخه پرجمع باندې ګټه واخلو. د ګډعامل په پېژندلوسره په افاده کې کولای شو الجبري افادې تجزیه کړو.

لومړی مثال: لاندې الجبري افادې تجزیه کړئ.

$a)\quad ab + ac - ad$ $\qquad b)\quad x^4 - x^3y + x^2y^2$

$c)\quad \frac{1}{2}m^2 - 2m$ $\qquad d)\quad 3xy - 6x^2$

حل:په راکړل شویوافادوکې لومړی په ټولوحدونوکې ګډ حد پیدا کوو او هغه د قوس مخکې لیکو، وروسته ټول حدونه بیل بیل په جملو وېشو اوحاصل یې، د قوس په منځ کې لیکو:

$a)\quad ab+ac-ad \qquad = a(b+c-d)$

$b)\quad x^4-x^3y+x^2y^2 = x^2(x^2-xy+y^2)$

$c)\quad \frac{1}{2}m^2-2m \qquad = m(\frac{1}{2}m-2)$

$d)\quad 3xy-6x^2 \qquad = 3x(y-2x)$

دويم مثال: لاندي الجبري افادې تجزيه کړئ.

$a)\ Ax+Bx+Ay+By$ $\qquad b)\ x^2-4y^2+x+2y$

$c)\ 2x^2+2xy+3x+3y$ $\qquad d)\ 2x-2y+2x+2y$

حل: لومړی افاده داسې ترتیبوو چې ورته حدونه څنګ پر څنګ راشي او وروسته د افادې ګډ حدود پیداکوو او بیا يې تجزیه کوو:

$$a)\ \underbrace{Ax+Bx}_{x}+\underbrace{Ay+By}_{y}$$
$$= x(A+B)+y(A+B)$$
$$= (A+B)(x+y)$$

$$b)\ x^2-4y^2+x+2y$$
$$= [x^2-(2y)^2]+(x+2y)$$
$$= (x-2y)(x+2y)+(x+2y)$$
$$= (x+2y)(x-2y+1)$$

$$c)\ 2x^2+2xy+3x+3y$$
$$= 2x(x+y)+3(x+y)$$
$$= (x+y)(2x+3)$$

$$d)\ 2x+2y+2x+2y$$
$$= 4x+4y$$
$$= 4(x+y)$$

پوښتنې

لاندې افادې تجزیه کړئ.

1) $x^4-x^3y+x^2x$ $\qquad$ 2) $x(2x-3y)^2+8(2x-3y)$

3) $10ab-15ac$ $\qquad$ 4) $32x^2y-4xy^2$

5) $\sqrt{2}x^3y^2-\sqrt{8}xy$ $\qquad$ 6) $0.5mn^2-0.125m^4n^3$

7) $ab+b+b$ $\qquad$ 8) $\frac{3}{2}x^2-\frac{4}{6}x^2-\frac{1}{2}x^2-x^4$

9) $mab+my+ny+nab$ $\qquad$ 10) $ab(b+a+c)+ac(a+b+c)+bc(c+b+a)$

د الجبري افادو ضرب چې يوه ګډه جمله ولري

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)\,x + ab$$

د مخامخ قوسونو له ضرب څخه وواياست چې د دوو عددونو د جمعې او ضرب حاصل له کومو عددونو سره برابر دی؟

فعالیت

• په هره مربع کې د عددونو ترمنځ څه ډول اړیکه لیدل کېږي؟

2, 5, 6, 3   −3, 2, −15, 5   4, 6, 8, 2

• له پورتنۍ اړیکې څخه په ګټې اخیستنې سره تش ځایونه ډک کړئ.

3, 4, …, …   …, …, 10, 5   …, 7, 12, …   …, 11, 24, …

4, …, …, 3

$(x+4)(x+3) = x^2 + ...x + ...x + ... = x^2 ....x + ...$

−3, …, …, 2

$(x-3)(x+2) = x^2 + ...x + ...x + ... = x^2 ....x + ...$

…, 8, 12, …

$x^2 + 8x + 12 = (x + ...)(x + ...)$

…, 1, −6, …

$x^2 + x - 6(x + ...)(x + ...)$

له پورتني فعالیت څخه لیدل کیږي:

د دوو الجبري عبارتونوله ضرب څخه چې یوه ګډه جمله و لري، لیکلای شو چې:

$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+a\times b$

که چیرې وغواړو یوه ترینوم الجبري افاده د x^2+bx+c تجزیه کړو، نو لومړی باید دوه عددونه داسې پیداکړو چې د ضرب حاصل یې c او د جمع حاصل یې b شي، که دې عددونو ته m او n وویل شي، نو لرو چې:

$x^2+bx+c=x^2+(m+n)x+m\cdot n$

مثال: د لاندې افادو ضرب اوتجزیه سرته ورسوئ.

$a)\ (t-4)(t+5)$ $\quad b)\ (a+3)(a+4)$ $\quad c)\ (x-0.4)(x+0.2)$

$d)\ (y+\frac{2}{3})(y+\frac{1}{2})$ $\quad e)\ x^2+12x+32$ $\quad f)\ x^2+4x+3$

$g)\ x^2-3x-28$ $\quad h)\ x^2-5x+6$

حل:

$a)\ (t-4)(t+5)=t^2+(-4+5)t+(-4\times 5)=t^2+t-20$

$b)\ (a+3)(a+4)=a^2+(3+4)a+(3\times 4)=a^2+7a+12$

$c)\ (x-4)(x-2)=x^2+(-4-2)x+(-4\times -2)=x^2-6x+8$

$d)\ (y+\frac{2}{3})(y+\frac{1}{2})=y^2+(\frac{1}{2}+\frac{2}{3})y+\frac{2}{6}=y^2+\frac{7}{6}y+\frac{2}{6}$

$e)\ x^2+12x+32=x^2+4x+8x+32=x(x+4)+8(x+4)=(x+8)(x+4)$

$f)\ x^2+4x+3=x^2+3x+x+3=x(x+3)+(x+3)=(x+3)(x+1)$

$g)\ x^2-3x-28=x^2+(4-7)x+(4)(-7)=x^2+4x-7x-28$
$=x(x+4)-7(x+4)=(x-7)(x+4)$

$h)\ x^2-5x+6=x^2-2x-3x+6=x(x-2)-3(x-2)=(x-3)(x-2)$

پوښتنې

1- لاندې افادې تجزیه کړئ.

$a)\ x^2+7x+12$ $\quad b)\ m^2-6m-7$

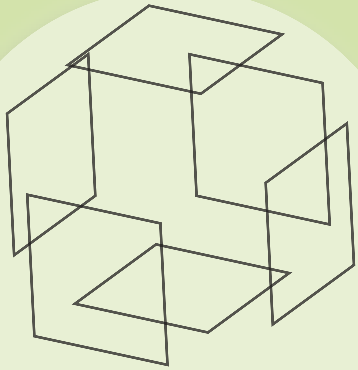
$c)\ a^2+a-2$ $\quad d)\ x^2-x-20$

2- لاندې افادې ضرب کړئ.

$a)\ (2x-1)(x+3)$ $\quad b)\ (\sqrt{2}+x^2)(x-\sqrt{2})$

$c)\ (a-3)(a+4)$ $\quad d)\ (0.5xm-\frac{1}{2})(4xm+0.5)$

د مکعبونو مجموع او تفاضل



$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

شکل ته پام وکړئ، وواياست چې له دې سطحو څخه که سره نژدې شي، کوم جسم په لاس راځي؟

فعاليت

لاندې جدول ډک کړئ.

a	b	$a^3 + b^3$	$(a+b)$	$a^2 - ab + b^2$	$(a+b)(a^2 - ab + b^2)$
5	2				
4	1				
–3	2				
3	–2				
4	4				

- د دوو $a^3 + b^3$ او $(a+b)(a^2 - ab + b^2)$ ولاړو ليکو ترمنځ، څه ډول اړيکې ليدل کيږي؟
- آيا کولای شئ يوه ورته رابطه د $a^3 - b^3$ لپاره وليکئ.

له پورتني فعاليت څخه کولای شو، دا پايله وليکو:

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

دا اړيکه کولای شو چې په الجبري ډول وښيو:

$$\begin{aligned}(a+b)(a^2 - ab + b^2) &= a(a^2 - ab + b^2) + b(a^2 - ab + b^2)\\ &= a^3 - a^2b + ab^2 + ba^2 - ab^2 + b^3\\ &= a^3 + b^3\end{aligned}$$

لومړی مثال: لاندې الجبري افادې تجزیه کړئ.

$a)\ b^3-8 \qquad b)\ a^6b^6-x^3y^3 \qquad c)\ h^3+\dfrac{1}{h^3}$

حل: لومړی الجبري افاده، د $a^3 \pm b^3$ مطابقت شکل ته اړوو، وروسته د مطابقت په مرسته هغه تجزیه کوو:

$$a)\ b^3-8=b^3-2^3=(b-2)(b^2+2b+4)$$

$$b)\ a^6b^6-x^3y^3=(a^2b^2)^3-(xy)^3=(a^2b^2-xy)(a^4b^4+a^2b^2xy+x^2y^2)$$

$$c)\ h^3+\frac{1}{h^3}=h^3+(\frac{1}{h})^3=(h+\frac{1}{h})(h^2-1+\frac{1}{h^2})$$

دویم مثال: د یوه مکعب مستطیل حجم داسې $27x^3-\dfrac{1}{8}$ بنودل شوی دی، که د مکعب مستطیل جګوالی $3x-\dfrac{1}{2}$ وي، ددې مکعب مستطیل د قاعدې مساحت به څومره وي؟

$$\text{د مکعب مستطیل حجم} = \text{ارتفاع} \times \text{د قاعدې مساحت} \Rightarrow \text{د قاعدې مساحت} = \frac{\text{د مکعب مستطیل حجم}}{\text{ارتفاع}}$$

$$\text{د قاعدې مساحت}=\frac{27x^3-\frac{1}{8}}{3x-\frac{1}{2}}=\frac{(3x)^3-(\frac{1}{2})^3}{3x-\frac{1}{2}}=\frac{(3x-\frac{1}{2})[(3x)^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}]}{(3x-\frac{1}{2})}=9x^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}$$

دریم مثال : د $\dfrac{x^3-y^3}{x^2+xy+y^2}$ افاده ساده کړئ:

حل : لومړی د صورت مطابقت، په انکشافي یا غزیدلې بڼه لیکو:

$$\frac{x^3-y^3}{x^2+xy+y^2}=\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{x^2+xy+y^2}=x-y$$

څلورم مثال :د $x^3+\dfrac{2}{x^3}$ افاده تجزیه کړئ؟

$$x^3+\frac{2}{x^3}=x^3+\frac{(\sqrt[3]{2})^3}{x^3}=x^3+(\frac{\sqrt[3]{2}}{x})^3$$

$$=(x+\frac{\sqrt[3]{2}}{x})(x^2-\sqrt[3]{2}+\frac{\sqrt[3]{4}}{x^2})$$

پوښتنې

1- د $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ مساوات صحت، په الجبري بڼه وښیئ.

2- لاندې افادې تجزیه کړئ.

$a)\ a^6b^6+x^3y^3 \qquad b)\ 8+b^3 \qquad c)\ x^{12}-y^{12}$

$d)\ 125x^3+y^3 \qquad e)\ 0.125x^3-1 \qquad f)\ \dfrac{1}{x^3}+1$

$g)\ 8-64a^3b^6 \qquad h)\ 8a^3-27b^3 \qquad i)\ b^6-1$

L.C.M

کوچنی مشترک مضرب (L.C.M)

د $\frac{5}{6}+\frac{3}{4}$ د کسرونو په حاصل کې د 6 او 4 د کوچني مشترک مضرب یا دواړو کسرونوګډ مخرج پیداکولو لپاره مو یوه لاره درلوده، د $\frac{2}{2x+2}+\frac{3}{x^2-1}$ جمعې د حاصل لپاره څه وړاندیزونه کوئ؟

فعالیت

- د $\frac{2}{8}$ او $\frac{3}{6}$ کسرونو د جمع حاصل لپاره مو لومړی د ٦ او ٨ کوچني ګډ مضرب یا دواړو کسرونوګډ مخرج پیدا کولو پړاوونه توضیح کړئ؟
- د $2x+2$ او x^2-1 افادي په ضربي عواملوتجزیه کړئ؟
- ضربي ګډ او ناګډعوامل یې وټاکئ؟
- د $2x+2$ او x^2-1 کوچني ګډ مضرب پیدا کولو لپاره سوچ وکړئ، څه باید وکړو؟
- د $2x+2$ او x^2-1 کوچنی ګډ مضرب خودی؟هغه په لاس راوړئ.
- د $\frac{2}{2x+2}+\frac{3}{x^2-1}$ کسرونو، د جمع حاصل په لاس راوړئ؟

ددوو یاڅو الجبري افادو د کوچني ګډ مضرب د پیداکولو لپاره، لومړی هغوی په لومړنیو ضربي عواملوتجزیه، وروسته هغه ګډعوامل چې تر ټولو لوی توان لري، له ناګډعواملو سره ضربوو چې کوچنی ګډ مضرب په لاس راکړي.

لومړی مثال: د $4x^2$ ، $2x+2$ او x^2-1 کوچنی ګډ مضرب په لاس راوړئ؟

حل: لومړی افادې جلا جلا تجزیه کوو:

$$4x^2 = 2^2x^2$$
$$2x+2 = 2(x+1)$$
$$x^2-1 = (x-1)(x+1)$$

لیدل کېږي چې هغه ګډ عامل چې لوی توان لري، $(x+2)$ او 2^2 دي چې د ضرب حاصل یې له ناګډو عواملو سره برابر په $2^2(x+1)(x-1)x^2 = 4x^2(x^2-1)$ دی چې د کوچني ګډ مضرب یا (L.C.M) په نامه یادېږي.

دویم مثال: د $68x^2+40x+32$ ، $6x^2-6$ او $4x^2+12x-16$ افادو کوچنی ګډ مضرب پیدا کړئ.

$$4x^2+12x-16=4(x^2+3x-4)=2^2(x+4)(x-1)$$
$$8x^2+40x+32=8(x^2+5x+4)=2^3(x+4)(x+1)$$
$$6x^2-6=6(x^2-1)=2\times 3(x-1)(x+1)$$

په پایله کې کوچنی ګډ مضرب عبارت دی له:

$$2^3\times 3(x+1)(x+4)(x-1)$$

پوښتني

د کوچني ګډ مضرب په پام کې نیولو سره یې ساده کړئ.

1) $\dfrac{2x}{3}-\dfrac{4}{5x}\div\dfrac{3}{10x}$

2) $\dfrac{3x-1}{x^2+2x-15}-\dfrac{2}{x+5}$

3) $\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{4}{x^2-1}$

4) $\dfrac{2}{x^2-1}+\dfrac{3}{x^3-1}+\dfrac{1}{x+1}$

د الجبري افادو ویش

$$\frac{2xy^2 - 4x^2y^4}{-2xy^2} = ?$$

پام وکړئ چې د مخرج افاده د صورت په کومې افادې پورې اړه لري، آیا کولای شئ هغه ساده کړئ؟

فعالیت

- کله چې د $\frac{995}{7}$ کسر، نور ونشو کړای، چې ساده یا اختصار کړو، نو پایله څه ده؟
- لاندې الجبري افادې ترممکن حده پورې ساده کړئ.

a) $\frac{2m^2y - 3x^3y^4 + 24xy^3}{-3xy^2}$, $x \neq 0 \wedge y \neq 0$ b) $\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$, $x \neq 2$

c) $\frac{x^3 - x^2 - x - 6}{x + 2}$, $x \neq -2$

- لاندې عملیو ته پام وکړئ او روښانه کړئ چې هرګام دکوم کاریه پایله کې لاس ته راځي؟ ولې؟

a)
$$\begin{array}{r|l} 995 & 7 \\ \cline{2-2} -7 & 142 \\ \cline{1-1} 29 & \\ 28 & \\ \cline{1-1} 15 & \\ 14 & \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x^2 - 11x - 6 & x + 2 \\ \cline{2-2} \pm x^3 \pm 2x^2 & x^2 - 4x - 3 \\ \cline{1-1} -4x^2 - 11x & \\ \mp 4x^2 \mp 8x & \\ \cline{1-1} -3x - 6 & \\ \mp 3x \mp 6 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

- د (a) په جز کې مو ولې وېش له کیڼې خوا له لومړی رقم ۹ څخه پیل وکړ؟ فکر وکړئ، په (b) جز کې مو ولې، له x^3 څخه د وېش عملیه پیل کړې ده؟

د یوې الجبري افادې له کېن لوري څخه ښي لوري (خوا) ته لیکل او ترتیبول د لوېې درجې څخه کوچنی درجې ته د ځوجمله یې ترتیب نزولي ترتیب نومېږي

د دوو الجبري افادو د یو پربل د وېش لپاره لاندې پړاوونه ترسره کړئ.

1- د مقسوم او مقسوم علیه پولینومونه په نزولي ډول ترتیب کړئ.

2- د مقسوم لومړی حد، د مقسوم علیه په لومړي حد ووېشئ چې حاصل یې د خارج قسمت لومړی حد دی.

3- په لاس راغلی خارج قسمت، د مقسوم علیه په ټولوحدونو کې ضرب، حاصل یې د مقسوم له ورته حدودو څخه تفریق کوو.

4- د مقسوم بل حد راښکته کوو د پاتې افادې څنګ ته یې لیکو، وروسته ددې افادې لومړی حد د مقسوم علیه په لومړی حد وېشواوحاصل یې د مقسوم علیه په ټولوحدودوکې ضربوو او حاصل یې له پاتې افادې څخه تفریق کوو.

5- وروسته 1، 2، 4 پړاوونو ته تر هغه دوام ورکوو چې د پاتې حدودو درجه د مقسوم علیه د حدونو له درجې څخه کوچنی شي.

لومړی مثال : د $x^3-3x^2-23x+30$ افاده په $x-6$ افادې باندې ووېشئ.

د تقسیم مراحل

$$I-\quad \frac{x^3}{x}=x^2$$

$$II-\quad \frac{3x^2}{x}=3x$$

$$III-\quad \frac{-5x}{x}=-5$$

$$\begin{array}{r|l} x^3-3x^2-23x+30 & x-6 \\ \hline -x^3\mp 6x^2 \quad\quad\quad\quad & x^2+3x-5 \\ \hline 3x^2-23x \quad\quad & \\ -3x^2\mp 18x \quad\quad & \\ \hline -5x+30 & \\ \mp 5x\pm 30 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

دویم مثال: د $x^5-2x^3+x^2-8x+4$ افاده په x^2-x-4 افادې وویشئ.

حل : دمقسوم اومقسوم علیه پولینومونه په نزولي ډول ترتیبوو او بیا عملیه سرته رسوو:

$$
\begin{array}{r|l}
x^5+0.x^4-2x^3+x^2-8x+4 & x^2-x-4 \\
\cline{2-2}
\underline{-x^5 \mp x^4 \mp 4x^3} & x^3+x^2+3x+8 \\
x^4+2x^3+x^2 & \\
\underline{-x^4 \mp x^3 \mp 4x^2} & \\
3x^3+5x^2-8x & \\
\underline{-3x^3 \mp 3x^2 \mp 12x} & \\
8x^2+4x+4 & \\
\underline{-8x^2 \mp 8x \mp 32} & \\
12x+36 &
\end{array}
$$

د تقسیم مراحل

$$
\left.
\begin{array}{ll}
I- & \dfrac{x^5}{x^2}=x^3 \\
II- & \dfrac{x^4}{x^2}=x^2 \\
III- & \dfrac{3x^3}{x^2}=3x \\
IV- & \dfrac{8x^2}{x^2}=8
\end{array}
\right\}
$$

څرنګه چې د دوو عددونو وېش د سـموالي لپاره مو دوه شـرطونه وڅېړل، نو د دوو الجبري افادو د وېش د سموالی لپاره هم دوه شرطونه څېړو:

1- د خارج قسمت اومقسوم علیه د ضرب حاصل د جمع پاتي د مقسوم له الجبري افادې سره باید برابر وي.

۲- پاتي درجه د مقسوم علیه له درجې څخه باید کوچنی وي.

لکه، په دویم مثال کې:

$$(x^2-x-4)(x^3+x^2+3x+8)+12x+36$$
$$=x^5-2x^3-8x+4$$

لیدل کېږي چې د خارج قسمت او مقسوم علیه، د ضرب حاصل، جمع پاتي د مقسوم له افادې سره برابر دي او د خارج قسمت درجه، نظر x ته له 3 سره برابره ده پاتي درجه (1) ده، نو په لاس راغلي پایله سمه ده.

دریم مثال: د $2x^2+x^4-3x+1$ افاده په $x+3$ افاده وویشئ:

حل: لومړی دمقسوم اومقسوم علیه افادې، په نزولي ډول ترتیبوو.

$$\begin{array}{l|l} x^4+2x^2-3x+1 & x+3 \\ \hline \underline{-x^4 \pm 3x^3} & x^3-3x^2+11x-36 \\ \quad -3x^3+2x^2 & \\ \quad \underline{\mp 3x^3 \mp 9x^2} & \\ \qquad 11x^2-3x & \\ \qquad \underline{\mp 11x^2 \pm 33x} & \\ \qquad\quad -36x+1 & \\ \qquad\quad \underline{\pm 36x \mp 108} & \\ \qquad\qquad 109 & \end{array}$$

پوښتني

د لاندې افادو د وېش حاصل پیدا کړئ.

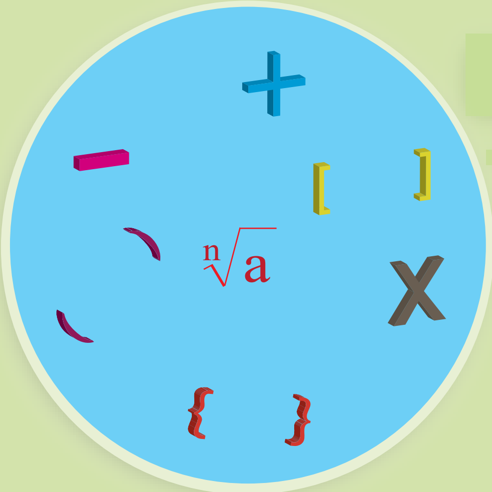
1) $(2t^3-4t^2-2t-6)\div(t^2+9t+7)$

2) $(1-x^2-x)\div(1-x)$

3) $(2y^3+y-3y)\div(y^2-3y-1)$

4) $(2x^3+5x^2-x-1)\div(x+3)$

د الجبري افادو د عمليو د سر ته رسولو ترتيب



که چېرې په الجبري افادو کې مخامخ نښې راغلې وي، په څه ډول يې په ترتيب سره افاده ساده کوو؟

فعاليت

• د لاندې افادو د ساده کولو لپاره کومې عمليې سرته ورسوو؟ د عمليې د سرته رسولو ترتيب، په شمېر سره ونوموئ.

$$3-2^4\times5+(16\div4)$$

$$4\times5\div2-3(2+3^2)+2$$

$$3x^2-4x(2+x)$$

$$2x-3\{-2(x+1)(x+2)\}+6x\div2$$

په پورتني فعاليت کې مو وليدل، چې د الجبري افادو عمليې، په ترتيب سره سرته رسول د عددونو د قانون له ترتيب څخه پيروي کوي. د يوې الجبري افادې د ساده کولو لپاره په ترتيب سره، په لاندې ډول عمل کوو

1- توان رفع کوو.

٢- د قوسونو په لرلو سره، لومړی هغه ساده کوو.

٣- په ترتيب سره له کيڼ څخه ښي اړخ ته د ضرب او وېش عمليې سرته رسوو.

٤- په ترتيب سره له کيڼ څخه ښي اړخ ته د جمع او تفريق عمليې سرته رسوو.

لومړی مثال : لاندې افادې ساده کړئ.

$$1)\ \frac{1}{2}m-3\left\{\left[5(m-\frac{1}{2}-m)\right]-m-6\right\}\div 2$$

$$=\frac{1}{2}m-3\left\{5m-\frac{5}{2}-5m-m-6\right\}\div 2$$

$$=\frac{1}{2}m-3\left\{-m-\frac{17}{2}\right\}\div 2$$

$$=\frac{1}{2}m+(3m+\frac{51}{2})\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}m+\frac{3}{2}m+\frac{51}{4}$$

$$=\frac{m+3m}{2}+\frac{51}{4}=\frac{4m}{2}+\frac{51}{4}$$

$$=2m+\frac{51}{4}$$

$$2)\ 2x-1-\{-2(x+2)\}+2x\div 2\times 5x$$

$$=2x-1-(-2x-4)+2x\div 2\times 5x$$

$$=2x-1+2x+4+x\times 5x$$

$$=2x-1+2x+4+5x^2$$

$$=4x+5x^2+3$$

فعالیت

• مخامخ عبارتونه ساده کړئ.

$a)\ \sqrt[3]{\frac{5}{8}}$

$b)\ \sqrt{8x^3y^3}$

$c)\ \sqrt{3a\sqrt{49a^2}}$

• د $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ او $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ کسرونو د مخرج د جذرونو د له منځه وړلو لپاره چې مخرج گویا شي $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ او $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ ، له کوم مطابقت څخه مرسته اخیستلای شئ؟

• د $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ او $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ کسرونوجذرونه په مخرج له منځه یوسئ اوساده یې کړئ.

د یوه کسرد مخرج د جذرونو له منځه وړلوعملیه، د الجبري کسر د گویا کولو یا ناطق کولو په نامه یادېږي.

مثال : د لاندې کسرونو مخرج ناطق کړئ.

1) $\frac{2}{\sqrt{x}}$ 2) $\frac{2}{\sqrt[3]{a}}$

3) $\frac{a-1}{\sqrt{a}-1}$ 4) $\frac{5}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

حل:

1) $$\frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x^2}} = \frac{2\sqrt{x}}{x}$$

2) $$\frac{2}{\sqrt[3]{a}} = \frac{2}{\sqrt[3]{a}} \times \frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{2\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^3}} = \frac{2\sqrt[3]{a^2}}{a}$$

3) $$\frac{a-1}{\sqrt{a}-1} = \frac{a-1}{\sqrt{a}-1} \times \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+1} = \frac{(a-1)(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a})^2-1^2} = \frac{(a-1)(\sqrt{a}+1)}{a-1} = \sqrt{a}+1$$

4) $$\frac{5}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{5(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{5(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{2-3} = \frac{5(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{-1} = -5(\sqrt{2}+\sqrt{3})$$

د يوې الجبري افادې د ساده کولو لپاره په ترتيب سره لومړی قوسونه له منځه وړو، وروسته د توان عمليه او په پای کې په ترتيب سره د وېش ضرب، جمع او تفريق عمليې له ښي خخه کيڼ اړخ ته سر ته رسوو.

- د $\sqrt{x}$ د ناطق کولو عامل $\sqrt{x}$ دی.
- د $\sqrt{x}+1$ د ناطق کولو عامل $\sqrt{x}-1$ دی.
- د $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ د ناطق کولو عامل $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ دی.

پوښتنې

لاندې افادې ساده کړئ.

1) $2x\times-2\{3x-(2+x)-1\}\div 2$

2) $\frac{1}{3}y-5\left[-2\left\{6(y-\frac{1}{3}-y)\right\}\right]\div 3$

3) $5+(-18)-[24+(-30)](-7)$

4) $[(-102)+(-330)]\div 16+[168+240-(-210)]\div 6$

5) $\frac{2}{\sqrt{7}}$

6) $\frac{3}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

7) $2\sqrt{2000ab}-\frac{b}{a}\sqrt{72ab}$

8) $\frac{2a}{\sqrt{a}}$

9) $\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

10) $2\sqrt{18x}+\sqrt{50x}-\frac{1}{2}\sqrt{20x}$

د پنځم څپرکي لنډیز:

- هغه الجبري افادې یا الجبري جملې چې له یوې جملې څخه جوړې شــوې وي، دمونوم یا یو جمله یي په نامه یادیږي، لکه: ax^n
- هغــه الجبــري افــاده چې له دوو حدونو څخه جوړه شــوې وي، دوه جمله یــي یا بینوم بلل کیږي، لکه: ax^2+b
- هغه الجبري افاده چې له دریو حدونو څخه جوړه شــوې وي، دري جمله يي يا ترینوم بلل کیږي، لکه: ax^2+bx+c
- هغه الجبري افادې چې له یوه یا څوحدونوڅخه جوړې شوې وي او د تورو توانونه یې بشپړ عددونه دي پولینوم بلل کیږي لکه: $ax^5+bx^3+cx^2-x-d$
- په یوه الجبري افاده کې، د متحول تر ټولو لوی توان دالجبري افادې درجه بلل کیږي.
- د پولینــوم هغــه ترتیب چې له کینې خوا څخه ښــي خوا ته، له لوی تــوان څخه کوچني ته ترتیب شوی وي، نزولي ترتیب بلل کیږي.
- د هر a او b لپاره لرو:

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

- د الجبري افادو د ګډو عواملو، چې تر ټولو لوی توان ولري، د ضرب حاصل، له ناګډو عواملو سره د L.C.M په نامه یادیږي.
- کــه چیــرې په یوه الجبري افاده کــې قوســونه او(+ ، - ، × او ÷ ...) عملیې راغلې وي، د ســاده کولو لپاره یې په ترتیب ســره لومړی کوچنی، منځنی او بیا لوی قوس له منځه وړو، وروســې د توان عملیه او په پای کې په ترتیب ســره د وېش، ضرب، جمع او تفریق عملیې له کین څخه ښي اړخ ته سرته رسوو.
- د $\sqrt{x}$ د ناطق کولو عامل $\sqrt{x}$ دی.
- د $\sqrt{x}+1$ د ناطق کولوعامل $\sqrt{x}-1$ دی.
- د $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ د ناطق کولوعامل عبارت له $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ دی.

دپنځم څپرکي پوښتنې

- په لاندې پوښتنو کې هره پوښتنې سوال ته څلورځوابونه ورکړل شوي، سم ځواب يې وټاکئ.

1- د $2x^2-\frac{1}{2}x$ افاده کې ګډ عامل :

a) 2 دی. b) x دی. c) $2x$ دی. d) نه لري.

2- د $(x-2)(x+3)$ الجبري افادوضرب حاصل عبارت دی، له:

a) x^2+5x+6 b) x^2-5x-6

c) x^2+x-6 d) x^2-x+6

3- د $\frac{3}{x^2-1}+\frac{3}{2x+2}$ افادې کوچنی ګډ مضرب، عبارت دی، له :

a: $2(x+1)(x-1)$ b) $(x+1)(x-1)$

c) $(2x+2)(x^2-1)$ d) هېڅ يو.

4- د $\frac{2x-4x^3+x^2+16x-8}{2x^2-8}$ افادې، د وېش حاصل عبارت له:

a) $-2x+1$ b) $(-2x+1)(2x)+\frac{-2x}{2x^2-8}$

c) الف او ب d) هېڅ يو.

5- د $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ د ناطق کولو عامل عبارت دی، له :

a) $\sqrt{a}$ b) $\sqrt{b}$

c) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ d) $\sqrt{a}-\sqrt{b}$

• لاندې تش ځایونه په مناسبو کلمو سره ډک کړئ.

1- د $2x^3 - 4x^2 + 3x - 1$ الجبري افاده، يوه . . . . حده درجه . . . . .افاده ده.

2- د $x^2 + 7x + 12$ الجبري افادې ضربی عوامل . . . . .او. . . . . . .دی.

3- د $\frac{x^2 - 1}{x + 1}$ وېش حاصل عبارت له . . . . دی.

4- $a^3 + b^3 =$ (. . . . .)(. . . . .)

5- د $(x^2 + x - 1)(x^2 - x - 1)$ د ضرب حاصل عبارت له . . . . دی.

• په لاندې جملو کې، کومه يوه سمه اوکومه يوه ناسمه ده؟ د سمې مخ ته (ص) توری او د ناسمې مخ ته (غ) توری وليکئ.

1- (   ) هغه الجبري افادې چې له څو حدونوڅخه جوړه شوې وي او د تورو توانونه يې بشپړ عددونه وي، د پولينوم په نامه يادېږي.

2- (   ) د $x^2 + 2ax + a^2$ افادې تجزيه $(x+a)$ $(x+a)$ ده

3- (   ) د $21x^3y^3$ او $14x^3y^2$ کوچنی ګډ مضرب $42x^3y^4$ دی.

4- (   ) $a^3 - b^3 = (a+b)(a^2 + ab + b^2)$

5- (   ) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

• لاندې پوښتنې بشپړې حل کړئ:

1- تجزیه يې کړئ

a) $y^2 - y - 2$

b) $a^2 - b^2 + 2bc - c^2$

c) $21a - 14ab + 28a^2$

d) $72m^8n^6 - 98m^6n^8$

e) $a^2x^2 + \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}$

f) $1 + 2ab - (a^2 + b^2)$

2- ساده يې کړئ

a) $\dfrac{x-1}{x-2} - \dfrac{x+1}{x-2} + \dfrac{1}{x^2-4}$

b) $\dfrac{(x+h)^3 - x^3}{h}$

c) $\dfrac{a^2b^{-2} - b^2a^{-2}}{ab^{-1} - ba^{-1}}$

3- و يې ویشئ

a) $\dfrac{12a^2 - 4a + 20}{40 - 5a}$

b) $\dfrac{a^4 - b^4}{a - b}$

c) $(3x^3 - x^2 - 4) \div (x - \frac{1}{2})$

d) $(x^3 - 5x + 6) \div (x - 2)$

e) $(x^2 - 5x + 64) \div (-x + 5)$

شپږم څپـــرکی

نامساوات



نامساوات
(Inequality)



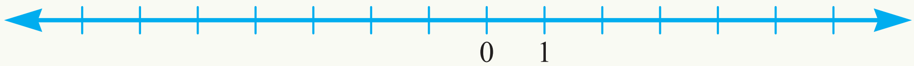
په دې انځور کې تله په کوم حالت کې ده؟
ولې؟

عموماً په ورځني ژوند کې د نامساوي کميتونو پرتله کولو ته اړتيا لرو، لکه د يوه ټولګي د زده کوونکو د نمرو ټولګه(مجموعه) که نمرې له زياتو څخه کمو نمرو ته درجه بندي کړو، آيا تاسې کولای شئ چې داسې نور مثالونه په ورځني ژوند کې ووايئ چې نا مساوي عددونه سره پرتله شي.

که چيرې عددونه د ($<,\leq,>,\geq$) علامو په مرسته اړيکې ولري، د نامساوي په نامه يادېږي، لکه: $5>4$, $18\leq18$ ....

فعاليت

- د $3,\frac{-3}{2},\sqrt{2},-4$ او $\frac{2}{3}$ عددونه، د عددونو په محورونو وټاکئ.



- له مناسبو علامو څخه په کار اخيستلو سره پورتني عددونه په ترتيب سره له کوچني څخه تر لوی پورې وليکئ.
- د عددونو په محور، د عددونو د ترتيب او د عددونو د ځای تر منځ څه اړيکې وينئ؟

د پورتني فعاليت کتنې، په لاندې ډول داسې لنډوو:

د عددونو په محور، هغه عدد چې د عدد ښۍ خواته پروت وي لوی او له هغه عدد څخه چې د هغې کيڼې خوا ته پروت دی، کوچنی عدد دی.

په بشپړ ډول سره ويلای شو چې که د b,a او c درې حقيقي عددونه وي، نو صورت نيسي، چې:

$$a<b\ ,\ b<c\quad\Rightarrow\quad a<c$$

فعالیت

- دوه نامساوي عددونه وټاکئ او د هغوی تر منځ اړیکه د کوچنیو یا لویو علامو په کار اخیستلوسره بیان کړئ؟
- د نامساوي دواړو خواوو ته د ۵ عدد ورجمع کړئ، ایا د نامساوي د علامې په لوري کې څه بدلون راځي؟
- د پورتنی نامساوي له دواړو خوا وو څخه د ۳ عدد تفریق کړئ، آیا د نامساوي علامې په جهت کې، څه بدلون راځي؟

په بشپړ ډول سره، د پورتني فعالیت پایله داسي بیانوو:

که $a<b$ وي، نو د b,a او c اختیاري حقیقي عددونو لپاره لرو:
$$a+c<b+c$$
$$a-c<b-c$$

فعالیت

- دوه نامساوي عددونه وټاکئ او د هغوی تر منځ اړیکه له کوچنی یا لویې علامې(<) څخه په کار اخیستلوسره ولیکئ؟
- د پورتنی نامساوي دواړه خواوې د ٤ په عدد کې ضرب کړئ، آیا د نامساوي علامې په لورى کې څه بدلون راځي؟
- د پورتنی نامساوي دواړه خواوې، د ٤- په عدد کې ضرب کړی، ایا د نامساوي د علامې په لوري کې څه بدلون راځي؟
- که د $4<7$ نامساوي دواړه خواوې معکوس کړو، آیا د نامساوي علامې په لوري کې بدلون راځي؟

په بشپړ ډول، د پورتني فعالیت پایله داسي بیانوو:

د b,a او c حقیقي عددونو لپاره لرو چې:

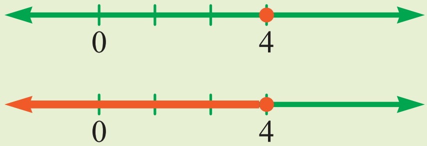
$$a<b \quad ، \quad c>0 \Rightarrow ac<bc$$
$$a<b \quad ، \quad c<0 \Rightarrow ac>bc$$
$$0<a<b \quad \Rightarrow \frac{1}{b}<\frac{1}{a}$$

په یاد ولرئ چې د وېش عملیه د ضرب د عملیې معکوسه عملیه ده، یعني که وغواړو چې یو عدد په a وویشو، هغه عدد په $\frac{1}{a}$ کې ضربوو، نو د نامساوات د ضرب عملیې ټول خواص، د وېش په عملیه کې هم $(a \neq 0)$ صدق کوي.

پوښتنې

د $-3<9$ په نامساوي کې د یوه اختیاري عدد په جمع، تفریق، ضرب او تقسیم کولو سره د نامساوي ټول خواص وڅېړئ؟

د خطي نامساواتو حل



د $x = 4$ او $x \leq 4$ دوه الجبري جملې په پام کې ونيسئ، د دې عبارتونو تر منځ څه ورته والى او توپير وينئ؟

فعاليت

- د $x+3=7$ معادله، د x دکوم عددي قيمت لپاره سمه ده؟
- آيا د x له په لاس راغلي قيمت څخه پرته بل قيمت x ته پيداکولای شئ چې په معادله کې رښتينوالى ولري؟
- د x دکوم عددي قيمت لپاره، د $x+3<7$ نامساوي سمه ده؟
- آيا د x په لاس راغلي قيمت څخه پرته بل قيمت شته چې نامساوي پرې سمه وي؟
- د x د څو عددي قيمتونو لپاره پورتنۍ نامساوي سمه ده؟

د پورتني فعاليت په ليدو سره نامساوي د مساوات په پرتله ډېر حلونه لري.

هغه الجبري رابطې چې د($>, <, \leq$ او $\geq$) علامو په مرسته يوه له بلې سره اړيکې ولري او په هغه کې د متحول توان يو وي، لومړۍ درجه يو مجهوله يا خطي نامساوي بلل کېږي.

لاندې نامساوي د يو مجهوله لومړۍ درجې نامساواتو بېلګه ده.

$$x+3<0 \quad , \quad 2x-\frac{1}{3}>3-x$$

$$6x+7\leq 5 \quad , \quad \frac{x}{5}+\sqrt{2}\geq 12$$

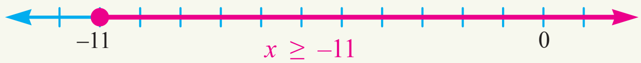
په بشپړ ډول، د x د هغو قیمتونو د پیدا کولو لپاره چې په نامساوي کې حقیقت ولري، د نامساواتو له خواصو څخه په ګټې اخیستنې سره نامساوي ته داسې بدلون ورکوو چې د نامساوي یو اړخ ته x او بل اړخ ته یې عددونه پراته وي.
د نامساوي حل څخه موخه دا ده چې د x لپاره باید هغه قیمتونه پیدا کړو چې د نامساوي په ساحه کې حقیقت ولري، دا ساحه د نامساوي د حل ساحه بلل کېږي.

لومړی مثال: د $x+4\geq -7$ نامساوي حل کړئ او د نامساوي د حل ساحه یې د عددونو په محور وښیئ؟

حل: د نامساوي په دواړو خواوو کې د(-4) عدد په جمع کولو سره لرو چې:

$$x+4-4\geq -7-4$$

$$x\geq -11$$



دویم مثال: د $2x+1>5$ نامساوي حل کړئ؟

حل: د نامساوي له خواصو څخه په ګټې اخیستنې سره کولای شو معلوم د نامساوي علامې یو اړخ ته او مجهول بل اړخ ته انتقال کړو:

$$2x+1>5$$

نو د نامساوي له دواړو خواوو څخه، د(-1) عدد تفریق کوو:

$$2x+1-1>5-1$$

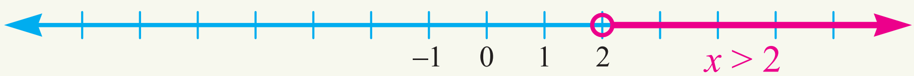
$$2x>4$$

د نامساوي دواړه خواوې په 2 وېشو یا یې په $\frac{1}{2}$ کې یې ضربوو:

$$\frac{1}{2}\times(2x)>\frac{1}{2}\times 4$$

$$x>2$$

یعني د ټولو هغو قیمتو لپاره چې له 2 څخه لوی وي، نامساوي صدق کوي، دا مطلب د عددونو په محور داسې ښودلای شو:



پوښتنه: فکر وکړئ چې ولې په لومړي مثال کې د عددونو په محور 11- په(●) او دویم مثال کې د عددونو په محور، په(O) ښودل شوی دی؟

په دې دوو مثالونو کې هغو علامو ته چې د نامساوي د حل ساحې د ټاکلو لپاره په کار وړل شوې دي پاملرنه وکړئ.

په عمومي حالت کې د $ax+b<cx+d$ الجبري عبارت چې په هغه کې a, b, c او d حقیقي عددونه او x متحول وي، لومړۍ درجه یو مجهوله یا خطي نامساوي بلل کېږي.

د نامساوي د حل لپاره لاندې ټکي په پام کې نیسو:

- د نامساوي د خواصو په پام کې نیولو سره معلوم یو اړخ او مجهول د نامساوي بل اړخ ته انتقالوو.
- معلوم عددونه په خپل منځ کې او مجهول حدونه په خپل منځ کې جمع کوو.
- د متحول د عددي قیمت د پیدا کولو لپاره د نامساوي دواړه خواوې د متحول په ضریب، د نامساوي د خواصو په پام کې نیولو سره وېشو.

دریم مثال: د $3x+1<x-5$ نامساوي حل کړئ.

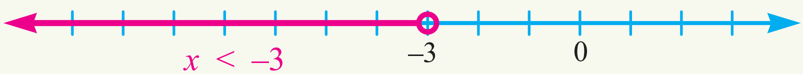
حل:

$$3x-x<-5-1$$

$$2x<-6$$

$$x<-\frac{6}{2}$$

$$x<-3$$



څلورم مثال: لاندې نامساوي حل کړئ.

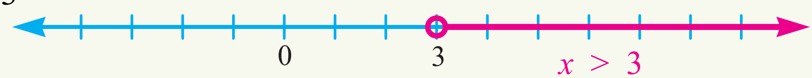
$$x+5<3x-1$$

$$x-3x<-1-5$$

$$-2x<-6$$

$$\frac{-2x}{-2}>\frac{-6}{-2}$$

$$x>3$$



1- د لاندې نامساوي ګانو حل پیدا او د هغوی دحل ساحه د عددونو په محور کې وښیئ.

$a)\ 4x \geq 8$

$b)\ 8 + x < 5$

$c)\ 5 + x < 2x - 1$

$d)\ -3x - 4 > x + 7$

$e)\ \frac{3}{2}x - 1 > x - \frac{2}{3}$

$f)\ 0.5 - x < 3x - 1$

$g)\ 2 - x \leq 2$

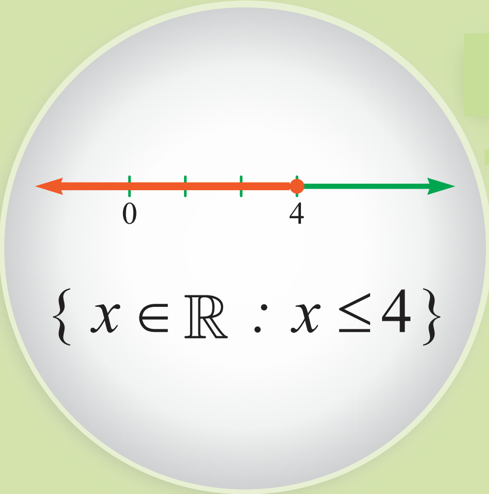
$h)\ 2x - 5 - 7x > 0$

$i)\ 5x + 6 > 0$

2- د 1325 د وېش پر 25 باید تر ټولو لوی عدد پیداکړو چې په 25 کې ضرب او له 1325 څخه کوچنی یا ورسره مساوي شي، دا عبارت په نامساوي وښیئ او خارج قسمت یې پیدا کړئ.

3- که تاسې ته وویل شي چې د یوه فعالیت د سرته رسولو لپاره حد اکثر 5 ورځې وخت لرئ، دا عبارت په نامساوات وښیئ.

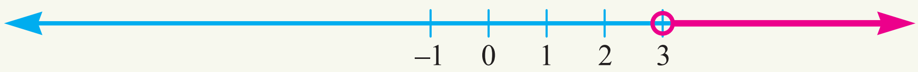
فاصلې (انټروالونه)



د یــوه نامســاوي د حل لپاره کولای شــو، ډېر عددونــه، پــه لاس راوړو چې د هغه نامســاوي حل وي، داســې ټــول حقيقي عددونه که د يوه ســټ پــه ډول په پام کې ونيسو، دې سټ ته د نامساوي حل وايي.

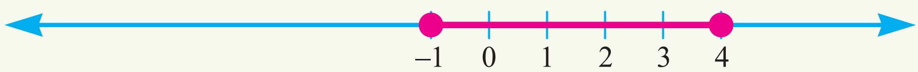
د مثال په ډول: $x > 3$ د $3x - 2 > 7$ نامساوي حل د ی، ځکه هر هغه عدد چې له 3 څخه لوی وي، په نوموړی نامساوي کې صدق کوي، دا د حل سټ، د رياضي په ژبه داسې ښودل کيږي: $\{x \in IR : x > 3\}$

داسې لوستل کيږي: د x ټول هغه حقيقي عددونه، چې له درېو(3) څخه لوی وي.



ليدل کيږي چې ددې ډول عددونو مجموعه، د عددونو د محور يوه برخه ده چې په رياضي کې ورته واټن يا انټروال وايي.

په لاندې شکل کې د عددونو په محور ټاکل شوی هغه واټن (انټروال) دی، چې له 1- څخه لوی يا ورسره مساوي او له 4 څخه کوچنی يا ورسره مساوي دی.

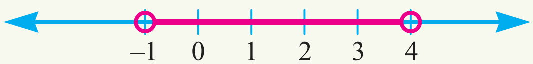


دا واټن، په $[-1,4]$ يا $\{x \in R : -1 \leq x \leq 4\}$ سره ښودل کيږي.

پاملرنه وکړئ، چې د -1 او 4 عددونه په فاصله کې ګډون لري. په هغه حالت کې چې د انټروال د پيل او پای ټکی ګډون ولري، دې واټن ته تړلی واټن وايي.

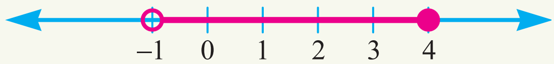
نو که په پورتني واټن کې، د 1- او 4 ټکي ګډون و نه لري، دې واټن ته خلاص واټن وايي او په لاندې ډول يې ښودلای شو:

$$(-1,4) = \{x \in IR : -1 < x < 4\}$$



که د مخکیني واټن د پای له ټکو څخه یوازې یو ټکی، لکه 4 په واټن کې شامل وي، هغه واټن ته نیمه خلاص یا نیم تړلی واټن وایي او هغه په لاندې شکل ښیو:

$(-1,4]=\{x \in IR:\ -1 < x \le 4\}$



په عمومي ډول، د هرو دوو a او b حقیقي عددونو چې، $a \le b$ څخه وي لرو:

د a او b تړلي واټن $[a,b]=\{x\in IR : a \le x \le b\}$



د a او b خلاص واټن $(a,b)=\{x\in IR : a < x < b\}$



د a او b نیمه خلاص واټن $(a,b]=\{x\in IR : a < x \le b\}$

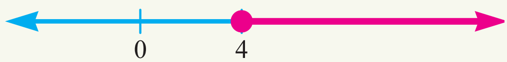


د a او b نیمه تړلي واټن $[a,b)=\{x\in IR : a \le x < b\}$



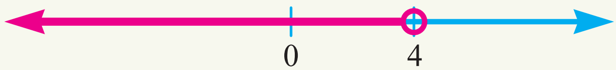
پاملرنه وکړئ چې د عددونو په محور باندې کولای شو، هغه واټن په پام کې ونیسو چې له یوې خوا څخه تړلي نه وي، په دې حالت کې، واټن، د ∞ علامې څخه په ګټې اخیستنې سره، چې هغه بې نهایت لولو، ښیو، لکه: د هغو عددونو سټ چې له 4 څخه لوی یا ورسره مساوي وي، داسې ښیو:

$\{x\in IR : 4 \le x\}=[4,\infty)$



او هغه عددونه چې له 4 څخه کوچنی وي عبارت دي له:

$\{x \in IR : 4 > x\} = (-\infty,4)$



نو په عمومي ډول، که a یو حقیقي عدد وي، نو لرو چې:

له a څخه لوی حقیقي عددونه $(a,\infty)=\{x\in IR : a < x\}$

له a څخه لوی یا ورسره مساوي حقیقي عددونه $[a,\infty)=\{x\in IR : a \le x\}$

له a څخه کوچني حقیقي عددونه وي. $(-\infty,a)=\{x\in IR : x < a\}$

له a څخه کوچني یا ورسره مساوي حقیقي عددونه. $(-\infty,a]=\{x\in IR : x \le a\}$

پوښتنې

1- لاندې انټروالونه د سټ په شکل ولیکئ او د عددونو په محور یې وښیئ.

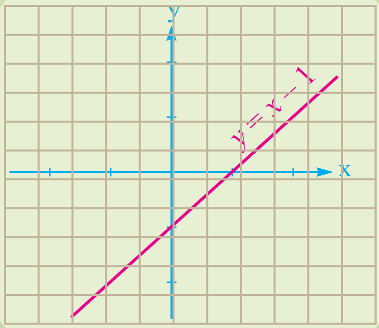
1) $[5,7]$ 2) $(9,-3)$ 3) $[-2,8)$ 4) $(6,1]$ 5) $[2,\infty)$

2- لاندې سټونه، د انټروال په ډول ولیکئ.

1) $A=\{x \in IR: 2 < x < 6\}$ 2) $B=\{x \in IR: -3 \le x \le 5\}$

3) $C=\{x \in IR: 0 \le x < 4\}$

د لومړۍ درجې بینوم د علامې ټاکل



په مخامخ شکل کې، x دکوم قیمت لپاره د $y = x - 1$ مستقیمه کرښه، د x محور نه د پاسه او x دکوم قیمت لپاره مستقیمه کرښه، د x محور نه لاندې پرته ده؟

فعالیت

- د $2x - 4$ الجبري افاده څو حده ده؟
- دا افاده د x متحول په کوم قیمت له صفر سره مساوی ده؟
- دا افاده د x متحول په کومو قیمتونو سره مثبت ده؟
- دا افاده د x متحول په کومو قیمتونو سره منفي ده؟
- د $P(x) = 2x - 4$ الجبري افادې گراف رسم کړئ.

د پورتني فعالیت ریاضي بیان، په لاندې ډول په جدول کې لنډوو:

x	$x < 2$	2	$x > 2$
$2x - 4$	$-$	0	$+$

په دې جدول کې لیدل کېږي چې د $2x - 4$ بینوم په $x = 2$ کې مساوي په صفر دی او د هغو قیمتونو لپاره چې له 2 نه کوچني وي، منفي علامه او په هغو قیمتونو کې چې له 2 نه لوی وي، بینوم مثبته علامه لري.

لومړی مثال: د $P(x) = -\frac{1}{2}x + 3$ د بینوم علامه وټاکئ.

حل: لومړی هغه قیمت پیدا کوو چې بینوم په هغې کې صفر وي:

$$-\frac{1}{2}x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{-1}{2}x = -3 \quad \Rightarrow \quad x = 6$$

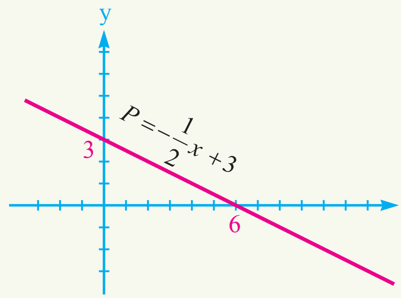
وروسته هغه قیموتونه چې بینوم په هغې کې مثبت وي، په لاس راوړو:

$$-\frac{1}{2}x+3>0 \quad \Rightarrow \quad \frac{-1}{2}x>-3 \quad \Rightarrow \quad x<6$$

په همدې ترتیب، هغه قیمتونه چې بینوم په هغې کې منفي وي، عبارت دي له:

$$-\frac{1}{2}x+3<0 \quad \Rightarrow \quad \frac{-1}{2}x<-3 \quad \Rightarrow \quad x>6$$

لاسته راغلي پایلې په لاندې جدول کې راټولوو:



x	$x<6$	6	$x>6$
$-\frac{1}{2}x+3$	+	0	−

پوښتنه: د $-\frac{1}{2}x+3$ بینوم علامه، د $x=7, x=3, x=-1$ او $x=12$ قیمتونو لپاره په لاس راوړئ او د بینوم رسم شوی ګراف شرح کړئ او د ځواب سم والی له پورتني جدول سره پرتله کړئ.

نو په کلي حالت کې د $y=ax+b$ بینوم د علامې د ټاکلو لپاره لومړی هغه قیمت په لاس راوړو چې بینوم په هغې کې صفر کېږي او د علامې د ټاکلو جدول یې په لاندې ډول دی:

1) $a>0$:

x	$x<-\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$	$x>-\frac{b}{a}$
$ax+b$	−	0	+

2) $a<0$:

x	$x<-\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$	$x>-\frac{b}{a}$
$ax+b$	+	0	−

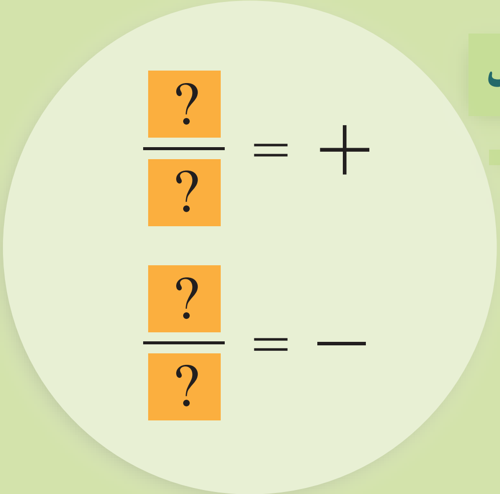
پوښتنې

د لاندې الجبري افادو علامې وټاکئ.

1) $3x-9$ 2) $7x-2$ 3) $\frac{3}{4}x-1$

4) $0.5x+10$ 5) $2x-4+x-1$ 6) $\frac{1}{2}x+3$

د کسري افادو د علامو تحليل او ټاکل



د a، b حقيقي عددونو لپاره، د $\frac{a}{b}$ کسر، څه وخت مثبت او څه وخت منفي علامه لري؟

فعالیت

- د $P(x)=\dfrac{3x+5}{2x-2}$ کسري افاده په پام کې ونيسئ.
- د $P(x)$ افاده په کوم حالت کې مثبت کېږي؟
- د $P(x)$ افاده په کوم حالت کې منفي کېږي؟
- د x په کوم قيمت سره د $P(x)$ کسري افاده مساوي په صفر ده؟
- آيا کولای شئ د $P(x)$ په افاده کې د x په ځای (۱) وضع کړئ؟ ولې.

د $P(x)$ د افادې د صورت او مخرج د علامې له ټاکلو څخه وروسته کولای شو، د $P(x)$ کسري افادې علامه د صورت او مخرج د علامو د وېش له حاصل څخه په لاس راوړو:

$$3x+5=0 \Rightarrow \quad x=\frac{-5}{3}$$

پوهيږو چې د $x<\frac{-5}{3}$ لپاره د بينوم د صورت علامه منفي او د $x>\frac{-5}{3}$ لپاره د بينوم د صورت علامه مثبت ده.

د مخرج د علامې د ټاکلو لپاره لومړی هغه قيمت پيدا کوو چې $2x-2$ په هغه کې صفر شي.

$$2x-2=0 \quad \Rightarrow \quad x=1$$

په پايله کې له $x<1$ څخه بينوم د مخرج علامه منفي او د $x>1$ لپاره د بينوم د مخرج علامه مثبته ده.

پاملرنه وکړی، په هغه قیمت کې چې د کسري افادې مخرج صفر کېږي نه دی تعریف شوی، پورتنی بحث په لاندې ډول د علامو د تحلیل او ټاکلو په جدول کې داسې لنډوو:

x	$x<-\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{3}<x<1$	1	$1<x$
$3x+5$	$-$	0	$+$		$+$
$2x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{3x+5}{2x-2}$	$+$	0	$-$	نه دی تعریف شوی	$+$

نو د $x<\frac{-5}{3}$ او $x>1$ قیمتونو لپاره د $\frac{3x+5}{2x-2}$ کسري افادې اشاره مثبت او د $\frac{-5}{3}<x<1$ قیمتونو لپاره د $\frac{3x+5}{2x-2}$ کسري افادې اشاره منفي ده.

او د $x=\frac{-5}{3}$ قیمت لپاره کسري افاده مساوي صفر ده.

په عمومي ډول، د کسري افادې د اشارې د تحلیل او ټاکلو لپاره لومړی د کسر د صورت او مخرج اشاره ټاکو، وروسته د صورت او مخرج د اشارو او د وېش له حاصل څخه د کسري افادې اشاره په لاس راوړو.

مثال: د $\frac{-x+3}{x}$ کسري افادې اشاره وټاکئ.

حل:

$-x+3=0 \quad \Rightarrow \quad x=3$

$x=0$

x		0		3	
$-x+3$	$+$		$+$	0	$-$
x	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{-x+3}{x}$	$-$	نه دی تعریف شوی	$+$	0	$-$

پوښتنې

د لاندې کسري افادو اشاره وټاکئ.

$a)\ \frac{-x+1}{5+x}$ $\qquad b)\ \frac{x}{x+1}$ $\qquad c)\ \frac{1}{x}+\frac{2}{7}$

کسري نامساوات

$$y = \frac{x+1}{x}$$

$y > 0$

$y < 0$?

د x پــه کــوم قیمت ســره د مخامخ کســري افــاده مثبتــه او د x پــه کوم قیمت سره افاده منفي ده؟

فعالیت

د $\frac{x-2}{4+2x} > 0$ کسري نامساوي په پام کې ونیسئ.

- د پورتني نامساوي د ربتینوالي لپاره د کسري افادې صورت او مخرج باید کومه علامه ولري؟
- د x متحول د کومو قیمتونو لپاره د پورتنۍ کسري افادې صورت مثبت دی؟
- د x متحول د کومو قیمتونو لپاره د پورتنۍ کسري افادې مخرج مثبت دی؟
- د x متحول د کومو قیمتونو لپاره د پورتنۍ کسري افادې صورت منفي دی؟
- د x متحول د کومو قیمتونو لپاره د پورتنۍ کسري افادې مخرج منفي دی؟
- د پورتني فعالیت د لاس ته راغلو پایلو په پام کې نیولو سره د x متحول د کومو قیمتونو لپاره د $\frac{x-2}{4+2x} > 0$ نامساوي سم دی؟

د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه ولیدل شول چې د $\frac{x-2}{4+2x} > 0$ نامساوي حل لپاره باید بېلابېل حالتونه په پام کې ونیسو. د کسري نامساواتو د حل د سټ پیدا کولو یوه بله لاره، د علامو د ټاکلو او تحلیل جدول دی، د مثال په ډول د $\frac{x-2}{4+2x} > 0$ نامساوي د حل سټ پیدا کولو لپاره داسې عمل کوو:

$$x-2=0 \quad \Rightarrow \quad x=2$$

$$4+2x=0 \quad \Rightarrow \quad x=-2$$

x		-2		2	
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$4+2x$	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{x-2}{4+2x}$	$+$ د نامساوي حل	نه دی تعریف شوی	$-$	0	$+$ د نامساوي حل

د علامو د تحلیل او ټاکلو په جدول کې لیدل کیږي چې هغه قیمتونه چې له ($x<-2$) او له ($x>2$) وي، افاده یې مثبته ده او له هغو قیمتونو څخه چې له(-2) څخه لوی او له(2) کوچنی ($-2<x<2$) وي، منفي ده. په پایله کې نامساوي د حل سټ عبارت دی له $x<-2$ او د $x>2$ یا $\{x\in R\ :x<-2\}\cup\{x\in R\ :x>2\}$ یا $(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$

مثال: د $\frac{2x}{5x+3}\geq 1$ کسري نامساوي حل کړئ؟

حل: د نامساوي د حل سټ د پیداکولو لپاره، لومړی کسري افاده له صفر څخه یو وار کوچنی یا لویه لیکو:

$$\frac{2x}{5x+3}\geq 1 \quad\Rightarrow\quad \frac{2x}{5x+3}-1\geq 0$$

$$\frac{2x-(5x+3)}{5x+3}\geq 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{-3x-3}{5x+3}\geq 0$$

$$-3x-3=0\Rightarrow x=-1$$

$$5x+3=0\quad\Rightarrow x=\frac{-3}{5}$$

اوس د نامساواتو د علامو د ټاکلو له جدول څخه د نامساوي حل په لاس راوړو.

x		-1		$-\frac{3}{5}$	
$-3x-3$	$+$	0	$-$		$-$
$5x+3$	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{-3x-3}{5x+3}$	$-$	0	$+$ د نامساوي حل	نه دی تعریف شوی	$-$

پورتني جدول ته په پاملرنې سره د نامساوي حل عبارت دی له: $\{x\in IR:-1\leq x<\frac{-3}{5}\}$

په بشپړ ډول د کسري نامساوي د حل لپاره په لاندې ډول پر مخ ځو:

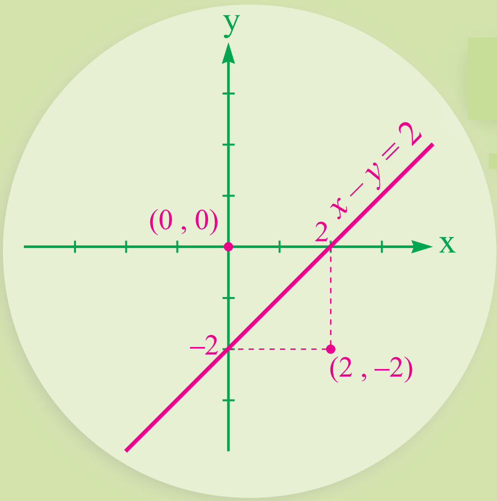
- نامساوي داسې لیکو چې له صفر څخه کوچنی یا لویه وي.
- نامساوي د علامو د ټاکلو له جدول څخه د نامساوي د حل سټ په لاس راوړو.

پوښتنې

د لاندې نامساواتو د حل سټ پیدا کړئ.

1) $\frac{-x-9}{2x+4}<0$ 2) $\frac{6x+7}{7-6x}\leq 0$ 3) $\frac{x+10}{2x-3}\geq 0$ 4) $\frac{7x-2}{3-2x}>3$

خطي دوه متحوله نامساوات



د $x-y=2$ مستقيمه کرښه، د وضعيه کمياتو مستوي، په دوه پاسنی او لاندينی ناحيو وېشي د کومې ناحيې د ټکو مختصات په $x-y<2$ نامساوي کې صدق کوي؟

د $x-y<2$ نامساوي چې په هغې کې د x او y متحولين لومړۍ درجه دي يو خطي دوه متحوله نامساوي بلل کېږي.

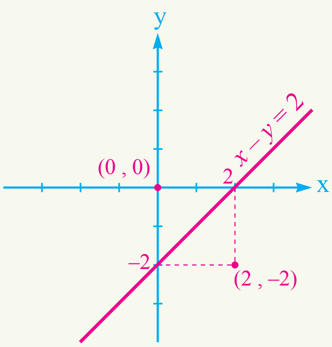
فعاليت

- د (x,y) مرتبې جوړې داسې په لاس راوړئ چې په $x-y<2$ نامساوي کې صدق وکړي.
- څومره مرتبې جوړې پيدا کولای شئ چې په پورتنی نامساوي کې حقيقت ولري؟
- آيا کولای شئ نورې درې مرتبې جوړې پيدا کړئ چې په پورتنی نامساوي کې صدق وکړي؟

په پورتنيو حالاتو کې ويلای شو چې:

د $ax+by<c$ نامساوي چې په هغه کې b,a او c حقيقي عددونه او $a\neq 0$ يا $b\neq 0$ وي، خطي دوه متحوله نامساوي بلل کېږي.

د دې نامساوي د حل سټ، د هغو عددونو مرتبې جوړې دي چې په نامساوي کې صدق کوي.



لومړی مثال: د $x-y<2$ دوه متحوله نامساوات د حل سټ پيدا کړئ؟

حل: د دې نامساوي د حل لپاره لومړی $x-y=2$ کرښه د وضعيه کمياتو په مستوي کې رسموو. ليدل کېږي چې د $x-y=2$ مستقيمه کرښه د وضعيه کمياتو مستوي په دوو ناحيو وېشي. د دې لپاره چې و پوهېږو، د کومې ناحيې د عددونو

مرتبې جوړې په نامساوي کې صدق کوي، له هرې ناحيې څخه يوه مرتبه جوړه ټاکو او په نامساوي کې يې وضع کوو.

د مثال په ډول، $(0,0)$ مرتبه جوړه په نامساوي کې صحيح ده.

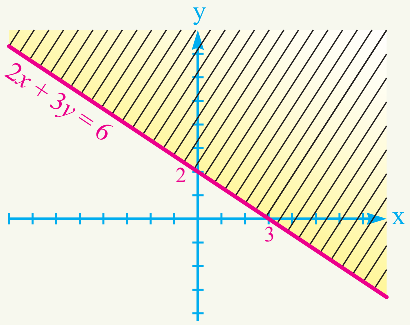
$$0-0<2 \quad \Rightarrow \quad 0<2$$

نو هغه ټکی چې د مستقيمی کرښې پورته خوا ته دی، د نامساوي حل دی.

د نامساوي د حل سټ د ښودلو لپاره هغه اړخ د مستقيمې کرښې توروو چې په نامساوي کې سموالی نه لري.

پوښتنه: څو نور ټکي له مستقيمې کرښې څخه پورته او ښکته خواته وټاکئ او بيا پورتنۍ پايله وڅېړئ؟

دويم مثال: د $2x+3y<6$ نامساوي د حل سټ پيدا کړئ؟



حل: لومړی د $2x+3y<6$ کرښه د وضعيه کمياتو په مستوي کې رسموو، وروسته د نامساوي د حل سټ د پيدا کولو لپاره د مستقيم د پاسه يا ښکته خواته د يوه ټکي مختصات ټاکو او په نامساوي کې يې وضع کوو، که حقيقت يې درلود، هغه اړخ د نامساوي حل دی او بل عکس نه دی.

لکه د $(0,0)$ د وضعيه کمياتو مبدأ مرتبه جوړه په پام کې نيسو:

$$2x+3y<6$$
$$2\times(0)+3\times(0)<6$$
$$0<6$$

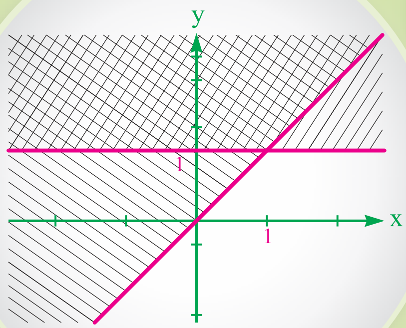
څرنګه چې د نوموړي ټکي مختصات په نامساوات کې حقيقت لري، نو د کرښې لاندې خوا ټکي د نامساوي د حل سټ دی.

پوښتنې

1) $3x-2<5x+y$ 2) $2y<3x$ 3) $x+y>0$

4) $2x-6y\geq 8x+4y$ 5) $x+y<0$ 6) $5x-3y<-1$

د دوه متحوله خطي نامساوي سيستمونه



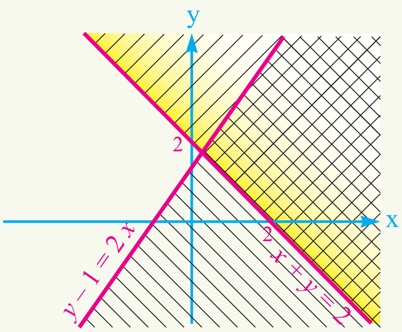
د لاندې نامساوي ګانو، د حل سټ پيدا کړئ. آيا کولای شئ اټکل وکړئ چې مخامخ شکل د کومو نامساواتو د حل ساحه راښيي؟

د $\begin{cases} x+y<2 \\ y-1>2x \end{cases}$ د نامساواتو سيستم چې په هغه کې دوه خطي، دوه متحوله نامساوي دي، د نامساوي سيستم بلل کېږي.

د نامساواتو سيستم له حل څخه مطلب دا دی چې هغه مرتبې جوړې پيدا کړو چې په يوه وخت کې په دواړو نامساواتو کې صدق وکړي.

لومړی د هر يوه نامساوي حل د وضعيه کمياتو په مستوي کې په لاس راوړو.

هغه ناحيه چې ګډه نه ده خط، خط شوې له نامساوات سره په يوه وخت کې د حل په سټ کې ګډون لري او دا ناحيه د نامساوات د سيستم حل دی.



د $x+y=2$ کرښې د رسمولو لپاره، که $x=0$ وي، $y=2$ او که، $y=0$ وي، نو $x=2$ کېږي او د $y-1=2x$ کرښه کې که $x=0$ وي، $y=1$ او که $y=0$ وي، نو $x=\frac{-1}{2}$ سره کېږي.

د دوه متحوله خطي نامساوي د سيستم د حل لپاره داسې عمل کوو:

لومړی د هر يوه دوه متحوله خطي نامساوي د سيستم حل، د وضعيه کمياتو په مستوي کې ټاکو.

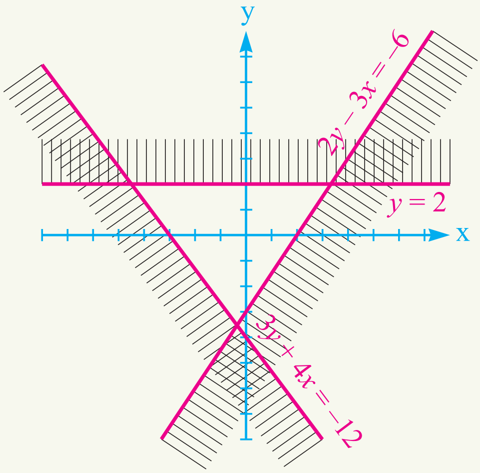
هغه ناحيه چې په يوه وخت کې د دواړو نامساواتو د حل د سټ يوه برخه وي، د سيستم حل دی.

مثال: د لاندې نامساواتو سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} 2y-3x>-6 \\ y-2<0 \\ 3y+4x>-12 \end{cases}$$

حل: لومړی د پورتنی نامساوي هره یوه کرښه رسموو یعنې:

$2y-3x=-6$ ، $y-2=0$ او $3y+4x=-12$



د $2y-3x=-6$ رسمولو لپاره که $x=0$ وي، $y=-3$ او د $y-2=0$ ګراف لپاره که $x=0$ وي، $y=2$ کېږي او د $3y+4x=-12$ کرښې د رسمولو لپاره که $x=0$ وي، $y=-4$ کېږي چې د نوموړو قیمتونو په مرسته یې ګراف په مخامخ بڼه رسموو.

وروسته د هرې یوې نامساوي د حل ساحه په بیل بیل ډول ټاکو.
د ورکړل شوو نامساواتو سیستم د حل سټ په شکل کې د نه توري شوې ناحیې په شکل کې لیدل کېږي.

پوښتنې

د لاندې سیستمونو د حل سټ د ګراف په مرسته په لاس راوړئ؟

1) $\begin{cases} x<3 \\ 2x+y<4 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+3y<9 \\ 5x-2y>5 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x<3 \\ y>2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x-3y<-3 \\ 5x-2y>9 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x+y<4 \\ x-y<3 \\ 5x-y>1 \end{cases}$

د شپږم څپرکي لنډيز:

- که چيرې عددونه د دې علامو ($<, \leq, >, \geq$) په مرسته يو له بل سره اړيکه ولري، د نامساوي په نامه يادېږي.
- که د يوه نامساوي له دواړو خواوو سره يو حقيقي عدد جمع يا تفريق کړو، په نامساوي کې بدلون نه راځي.
- که د يوه نامساوي دواړه خواوې، په يوه مثبت حقيقي عدد د صفر د خلاف ضرب يا تقسيم شي په نامساوي کې بدلون نه راځي.
- که د يوه نامساوي دواړه خواوې، په يوه منفي حقيقي عدد د صفر د خلاف ضرب يا وويشل شي، د نامساوي لوری بدلون کوي.

تړلی انټروال	$[a,b]=\{x\in IR : a\leq x\leq b\}$
خلاص انټروال	$(a,b)=\{x\in IR : a< x< b\}$
نيمه خلاص انټروال	$(a,b]=\{x\in IR : a< x\leq b\}$
نيمه تړلی انټروال	$[a,b)=\{x\in IR : a\leq x< b\}$

- د يوې کسري افادې د علامې د ټاکلو لپاره لومړی د صورت او مخرج علامه بېله بېله ټاکو وروسته د علامو د وېش حاصل په لاس راوړو.
- د $x+3\leq 5$ دوه متحوله خطي نامساوي د سيستم د حل لپاره داسې عمل کوو.

لومړی د هر دوه متحوله خطي نامساوي د سيستم حل، د وضعيه کمياتو په مستوي کې ټاکو. هغه ناحيه چې په يوه وخت کې د دواړو نامساواتو د حل سټ يوه برخه وي، د سيستم حل دی.

د شپږم څپرکي پوښتنې:

• په لاندې پوښتنو کې د هرې پوښتنې لپاره څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب په نښه کړئ:

1– له لاندې نامساواتو څخه کوم یو سم دی؟

$a)\ \frac{1}{2}+\frac{3}{6}\le 2-\frac{1}{3}$ $\quad b)\ \frac{3}{2}>\sqrt{2}$ $\quad c)\ \sqrt{9+16}\ge 5$ $\quad d)$ د b,a او c ځوابونه

2- د $x+3\le 5$ نامساوي د حل سټ عبارت دی له:

$a)\ \{x\in IR: x\le 2\}$ $\quad b)\ \{x\in IR: 2\le x\}$

$c)\ \{x\in IR: x\le 8\}$ $\quad d)\ \{x\in IR: x<-2\}$

3- د لاندې انټروالونو څخه کوم یو د $2x+3>-1$ نامساواتو د حل سټ دی.

$a)\ [-2,\infty)$ $\quad b)\ (2,\infty)$ $\quad c)\ (1,\infty)$ $\quad d)\ (-2,\infty)$

4– که $0<a<b$ څخه وي، له لاندې اړیکو څخه کومه یوه سمه ده.

$a)\ \frac{1}{b}<\frac{1}{a}$ $\quad b)\ \frac{-1}{b}<\frac{-1}{a}$ $\quad c)\ -b<-a$ $\quad d)$ ځوابونه b,a او c

5– له لاندې انټروالونو څخه کوم یو د $\frac{x+3}{3-x}>0$ نامساوي د حل سټ دی؟

$a)\ (-3,3)$ $\quad b)\ (-\infty,3)$ $\quad c)\ (-3,\infty)$ $\quad d)\ (-3,3)$

• تش ځایونه، په مناسبو کلمو سره ډک کړئ:

1– د $ax+by<0$ نامساواتو کې د ټولو هغه ………………… سټ چې په نامساواتو کې صدق وکړي، د پورتنې نامساواتو د حل سټ بلل کېږي.

2- د $[4,5]$ انټروال، د ………………… په نامه یادېږي.

3- د $2x+4$ بینوم، د ………………… قیمتونو لپاره منفي کېږي.

4- د $-x+\frac{1}{2}$ بینوم، د ………………… قیمتونولپاره مثبت کېږي.

5- د $2x+5\le\frac{1}{5}-x$ نامساوي د حل سټ عبارت دی له …………………

• له لاندې جملو څخه چې کومه یوه سمه وي، د هغې په مخ کې د(س) توری او د ناسمې په مخ کې د(غ) توری ولیکئ.

-1 (   ) د یوې نامساوي د حل سټ یو عنصر لري.

-2 (   ) د $\{x \in R \ : 2 \le x < 5\}$ یو تړلی انتروال دی.

-3 (   ) د نامساوي ګانو د سیستم د حل سټ، د وضعیه کمیاتو د مستوي یوه برخه ده.

-4 (   ) د خطي نامساوي د حل ستونه بې شمیره دي.

-5 (   ) څرنګه چې $3 < 2-$ څخه دی نو، له دې ځایه دا پایله $-\frac{1}{2} < \frac{1}{3}$ اخیستلای شو.

• لاندې پوښتنې په بشپړ ډول حل کړئ:

-1 د لاندې نامساوي ګانو حل په لاس راوړئ.

$a)\ \frac{x-5}{4} - \frac{x-8}{3} < 0$

$b)\ x-2 < 3(2x-9)$

$c)\ x^2 - 9 < 0$

$d)\ \frac{3x+4}{x} - 1 < 0$

$e)\ 1 - \frac{2}{x} \le 3$

-2 لاندې انتروالونه د عددونو پر محور وښیئ.

$a)\ [-1,2]$ $b)\ (-2,1]$ $c)\ [-1,1)$ $d)\ (-2,2)$

-3 د لاندې عددونو ستونه، د انټروال په بڼه ولیکئ او د عددونو پر محور یې وښیئ.

$a)\ \{x \in IR : x \le 2\}$ $b)\ \{x \in IR : x \le 5\}$

$c)\ \{x \in IR : -1 \le x \le 6\}$ $d)\ \{x \in IR : -4 < x < 2\}$

4- د لاندې نامساوي د سیستم حل پیدا کړئ:

$$a)\ \begin{cases} y > x \\ 3y < 2 \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} 2x - y > 0 \\ x - 2y < 0 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} x + y < 2 \\ y - 4 > 2x \end{cases}$$

$$d)\ \begin{cases} 2x + 2y < 8 \\ 3x - 3y < 9 \\ 10x - 2y > 2 \end{cases}$$

$$e)\ \begin{cases} y > 2 \\ x > -3 \\ y + x < 0 \end{cases}$$

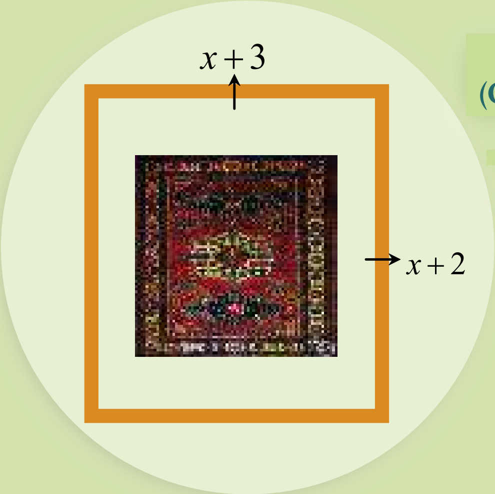
$$f)\ \begin{cases} y < 2 \\ x < -3 \\ y + x > 0 \end{cases}$$

اووم څپـــرکی

دویمه درجه یو مجهوله معادلې



دويمه درجه يو مجهوله معادلې
(Quadratic Equation)



که يوه کوټه، د يوې مربع شکل غالۍ په وسيله فرش کړو، په دې شرط چې د خونې اوږدوالی د غالۍ له اوږدوالي څخه د 3m په اندازه او سوریې د غالۍ له سور څخه د 2m په اندازه زيات وي، د کوټې او غالۍ د مساحتونو معادلې څه ډول ليکلای شو؟

فعاليت

- الجبري افاده تعريف کړئ.
- معادله تعريف کړئ.
- د يو مجهوله لومړۍ درجې معادلې يو مثال وليکئ.
- د يو مجهوله لومړۍ درجې معادلې عمومي شکل وليکئ.
- د $(x-2)(x+3)=0$ معادلې د قوسونو د ضرب حاصل پيدا کړئ.
- د پورتنۍ معادلې درجه د $x+4=3x-1$ معادلې له درجې سره پرتله کړئ.

هغه معادلې چې يو مجهول ولري او د هغې درجه دوه وي يو مجهوله دويمه درجه معادله بلل کېږي چې عمومي شکل يې $ax^2+bx+c=0$ ، $a\neq 0$ چې b,a او c حقيقي عددونه او x مجهول بلل کېږي، که چېرې $b=0$ يا $c=0$ وي، په دې حالت کې دې ډول معادلې ته نيمګړې دويمه درجه معادله وايي.

لومړی مثال: يو تار چې يو متر اوږدوالی لري غواړو له هغه څخه يو مستطيل چې مساحت يې $600cm^2$ دی جوړ کړو، د دې مستطيل اوږدوالی او سور څرنګه وټاکو؟

حل: که د مستطيل اوږدوالی x او سوریې په y وښيو، د مستطيل محيط $2(x+y)=100 \ldots I$

اريکې او مساحت يې له $x\times y=600 \ldots II$ اړيکې څخه په لاس راوړو.

$$\begin{cases} 2(x+y)=100 \\ x\cdot y=600 \end{cases} \begin{matrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{matrix} \begin{cases} x+y=50 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{I} \\ x\cdot y=600 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{II} \end{cases}$$

د I له معادلې څخه د y قیمت د x له جنسه په لاس راوړو او په II معادله کې یې وضع کوو:

$$\begin{cases} 2(x+y)=100 \\ x\cdot y=600 \end{cases} \Rightarrow x(50-x)=600$$

$$50x-x^2=600$$

څرنګه چې په پورتنۍ معادله کې د x درجه دوه ده، نو نوموړې معادله دویمه درجه ده. د معادلو د حلونو پیداکولو لپاره بېلابېلې لارې شته چې هغه تر څېړنې لاندې نیسو.

دویم مثال: هغه عدد په لاس راوړئ چې مربع یې د 6 په اندازه له خپل عدد څخه زیاته وي.

حل: که چېرې عدد په x ونوموو، نو پورتنی بیان د ریاضي په ښه داسې لیکو:

$x^2=6+x$ یا $x^2-x-6=0$

د دې ډول معادلو حل به په راتلونکې لوست کې وڅېړو

درېیم مثال: په لاندې معادلو کې د عمومي شکل له مخې د b,a او c ضریبونو قیمتونه ولیکئ.

حل:

$a)\ 2x^2-4x+1=0$ $b)\ 3x-x^2=4$ $c)\ 4x^2-1=0$

$d)\ 7x^2=49$ $e)\ x^2-4=0$ $f)\ \frac{3}{4}-x^2=\frac{2}{3}x$

جزء	معادلې	د a ضریب	د b ضریب	د c ضریب
a	$2x^2-4x+1=0$	2	–4	1
b	$3x-x^2=4$	–1	3	–4
c	$4x^2-1=0$	4	0	–1
d	$7x^2=49$	7	0	–49

پوښتنې

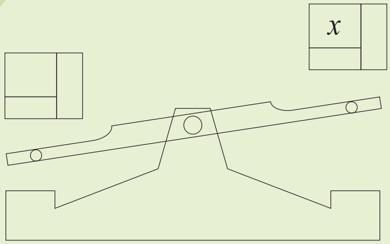
1- په لاندې معادلو کې پوره او نیمګړې دویمه درجه معادلې په ګوته کړئ.

$a)\ 6-2x+x^2=0$ $b)\ 5x^2-3x+1$ $c)\ \sqrt{2}x^2-4x=0$ $d)\ -x^2=3$

2- په لاندې معادلو کې د a، b او c ضریبونه وښیئ.

$a)\ 6x^2-4x=2$ $b)\ 3x-4=x^2$ $c)\ 4x-x^2-6=4x^2$

د دویمه درجه یو مجهوله معادلې حل



آیا کولای شئ چې د x لپاره داسې قیمت پیدا کړئ چې تله په تعادل کې راشي؟

فعالیت

x	$2x+4$	$3x-1$
–3		
–2		
0		
5		

- د $2x+4=3x-1$ معادلې حل پیدا کړئ.
- پورتنی مساوات د x د بېلابېلو قیمتونو لپاره په مخامخ جدول کې وڅېړئ.

x	x^2-4x+3
–3	
–2	
–1	
0	
1	

- د جدول او پاسنی پوښتنې په پام کې نیولو سره توضیح ورکړئ چې د معادلې د حلولو پیدا کول یعنې څه؟
- مخامخ جدول پوره او د هغې له مخې د $x^2-4x+3=0$ معادلې حلونه په لاس راوړئ؟

هغه قیمتونه چې په یوه دویمه درجه معادله کې برابروالی راولي، د یو مجهوله دویمې درجې معادلې حل بلل کېږي.

لومړی مثال: هغه عدد پیدا کړئ چې مربع یې د 12 واحدو په اندازه له عدد څخه زیاته وي.

حل: که چېرې عدد ته x ووایو، نو الجبري عبارت داسې بنه نیسي:

$$x^2=x+12$$

څرنګه کولای شو چې له پورتني مساوات څخه د هغې حل پیدا کړو؟

که چېرې $x = 1$ په معادله کې وضع کړو، نو لیدل کېږي چې د مساوات ښې اړخ د 13 عدد او کیڼ اړخ ته یې د 1 عدد په لاس راځي. په معادله کې د $x = 2$ قیمت په وضع کولو سره لیدل کېږي چې د مساوات ښي اړخ ته 14 او کیڼ اړخ ته یې، د 4 عدد په لاس راځي او د $x = 3$ په وضع کولو سره لیدل کېږي چې ښي اړخ ته د 15 عدد او کیڼ اړخ ته د 9 عدد دی.
په همدې ترتیب د نورو قیمتونو په وضع کولو سره، لکه په $x = 4$ لیدل کېږي چې د مساوات ښي اړخ ته د 16 عدد او کیڼ اړخ ته هم 16 عدد په لاس راځي، لیدل کېږي چې له 16=16 مساوي کېږي، نو $x = 4$ د معادلې یو حل دی.

x	x^2	$x + 12$
1	1	13
2	4	14
3	9	15
4	16	16

د پورتنی لارې لنډیز چې د معادلې حل د پیدا کولو لپاره مو تري ګټه واخیسته کولای شو، په مخامخ جدول کې داسې ولیکو:
آیا کولای شو چې د دویمې درجې معادله د حل لپاره یوه بشپړه لاره پیدا کړو؟

دویم مثال: هغه عدد په لاس راوړئ چې د هغې د مربع جمع له 1 سره مساوي په صفر شي.
حل: د پاسني بیان الجبري افاده عبارت ده له: $x^2 + 1 = 0$

x	x^2	-1
1	1	-1
2	4	-1
0	0	-1
-1	1	-1
-2	4	-1
-3	9	-1

د پورتنی لارې په څېر د اټکل شویو عددونو په وضع کولو سره د معادلې د حل په لټولو پیل کوو او پر مخ ځو، د دې کار لپاره د پورتني جدول په څېر، مخامخ جدول په پام کې نیسو.
په دې جدول کې لیدل کېږي چې نه شو کولای تعادل وساتو، یعني د x لپاره داسې قیمت نه شو پیدا کولای چې د معادلې دواړه خواوې مساوي کړي. له بلې خوا له معادلې څخه څرګندیږي کله چې یو عدد مربع کړو او یو ورسره جمع کړو، هیڅ وخت مساوي په صفر نه شي کېدالای، نو دا دویمه درجه معادله حل نه لري.

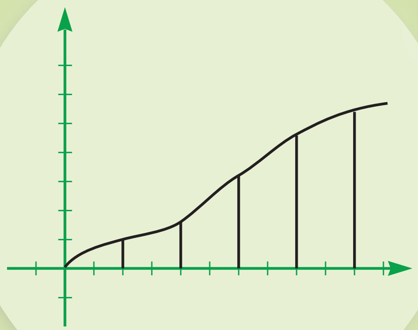
پوښتنې

1- یوه دویمه درجه یو مجهوله معادله ولیکئ چې حل و نه لري.

2- لاندې معادلې حل کړئ.

$a)\ x^2 - 1 = 0 \qquad b)\ x^2 = 0$

غير خطي اړيکې



ډاکټران د يوه ماشوم د ونې(قد)اوږدوالی په بېلابېلو وختونو کې، په مخامخ ګراف کې څېړي. آيا تاسې تر اوسه پورې د خپلې ونې(قد) د اوږدوالي بدلون ته فکر کړی دی چې په بېلابېلو وختونو کې څومره وو؟

فعاليت

• د يوې مربع د ضلعې د اوږدوالي او مساحت تر منځ اړيکه په پام کې ونيسئ، د مربع د ضلعې اوږدوالی په x او مساحت يې په y ښيو.

• د x او y اړيکه په يوه معادله کې وښيئ.

• مخامخ جدول پوره کړئ.

x	1	2	3	4	
y		4			25

• د قايمو مختصاتو په سيستم کې د پورتنيو مرتبو جوړو ټکي وټاکئ او له يو بل سره يې ونښلوئ.

• د دقيق ګراف د رسمولو لپاره x ته ډېر سره نژدې قيمتونه ورکوو، لاندې جدول پوره کړئ، د پورته په څېر ټکي د وضعيه کمياتو په سيستم کې وټاکئ او ګراف يې رسم کړئ.

x	0	0.2	0.5	0.8	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	2.2	2.4	2.6	2.8	3
y		0.4			1				3.24	4					9

• د پورتني جدول په مرسته لاندې جدول په خپلو کتابچو کې بشپړ کړئ.

x	−3	−2.8	−2.6	−2.4	−2.2	−2	−1.8	−1.6	−1.4	−1.2	−1	−0.8	−0.5	−0.2	
$y=x^2$															0

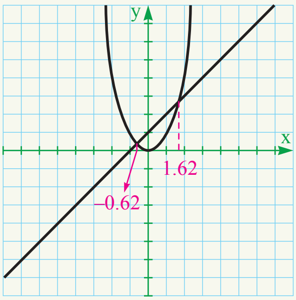
• له پورتنيو جدولونو څخه په ګټې اخيستلو سره، د $y = x^2$ معادلې ګراف په ډېر غورسره رسم کړئ.

له پورتني فعاليت څخه، لاندې پايله په لاس راځي:

پایله: په پورتني فعالیت کې مو ولیدل چې د $y=x^2$ معادلې ګراف کرښه نه ده.

مثال: د $\begin{cases} y=x^2 \\ y=x+1 \end{cases}$ سیستم د معادلاتو ګراف د قایمو مختصاتو په سیستم کې رسم کړئ او ګډ حل یې پیدا کړئ؟

حل: له هغو لارو څخه چې مخکې مو د ګراف د رسمولو لپاره ترې ګټه واخیسته، د پورتنیو معادلو د ګرافونو د رسمولو لپاره د هغو د عددونو د مرتبو جوړو جدولونه ترتیب او د مختصاتو په سیستم کې د معادلو له ټاکلو څخه وروسته یې ګرافونه رسموو.



- د $y=x^2$ لپاره لرو:

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
$y=x^2$	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25

- د $y=x+1$ لپاره:

x	0	1
$y=x+1$	1	2

د ګراف له مخې د ګډ حل د ټکو ورنژدې قیمتونه یې مساوي په:

$$x_1=1.62 \quad , \quad x_2=-0.62$$

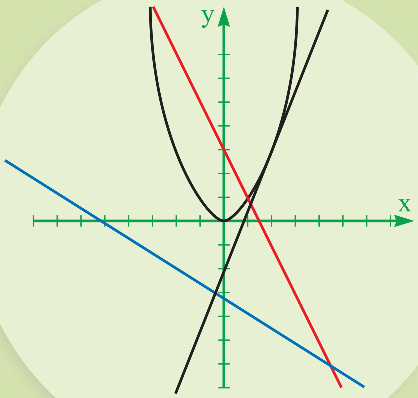
پوښتنې

د لاندې سیستمونو ګراف رسم کړئ.

-1 $\begin{cases} y=x^2 \\ y=x-2 \end{cases}$

-2 $\begin{cases} y=x^2 \\ y=0 \end{cases}$

د دويمي درجــي معادلې حل، په هندسي لاره(طريقه)



په مخامخ شکل کې، مستقيمې کرښې، لـه ورکړل شـوي منحنـي سـره، په څو حالتونو کې دي؟

فعاليت

- آيا د $x^2-6x+7=0$ معادله کولای شو چې داسې $x^2=6x-7$ وليکو؟
- که چيرې نومورې مسـاوات له y سـره مسـاوي وي، $y=x^2=6x-7$ نو $y=x^2$ او $y=6x+7$ دی.
- د $\begin{cases} y=x^2 \\ y=6x-7 \end{cases}$ معادلو د سيستم گراف د مختصاتو په سيستم کې رسم کړئ؟
- د پورتني سيستم گرافونه يو بل په څو ټکو کې پرې کوي؟
- د پورتني سيستم حل د گرافونو د پرېکړې له ټکو سره څه اړيکه لري؟

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايله په لاس راځي:

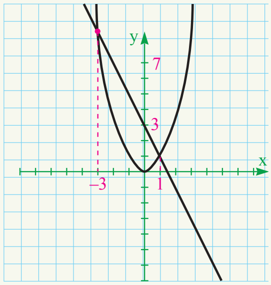
- هره دويمه درجه معادله کولای شو چې د $y=x^2$ معادلې او د $y=ax+b$ کرښه ايزو معادلو په څېر وليکو.

- د x ټکی د تقاطع مختصه(په هغه حالت کې چې وي) د دويمې درجې معادلې حل دی د پورتنۍ کړنې په مرسته د دويمه درجه معادلې حل پيدا کول د هندسي حل په نامه يادېږي.

لومړی مثال: د $x^2+2x-3=0$ معادلې حل په هندسي لاره پيدا کړئ؟

حل: د $x^2+2x-3=0$ معادله کولای شو په لاندې ډول وليکو او گراف يې رسم کړو.

$$x^2=-2x+3 \Rightarrow \begin{cases} y=x^2 \\ y=-2x+3 \end{cases}$$



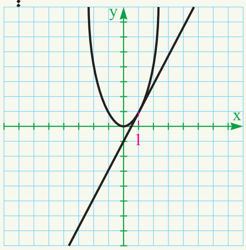
x	–2	–1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

x	0	3
y	3	–3

له شکل څخه ليدل کېږي چې مستقيمه کرښه منحني په دوو بېلو ټکو کې قطع کوي چې د تقاطع ټکي د x مختصه د دويمه درجه معادلې حل دی يعنې $x_1 = -3$ ، $x_2 = 1$

دويم مثال: د $x^2 + 2x + 3 = 0$ معادلې حل د هندسي لارې په مرسته پيدا کړئ؟

حل: د $y = x^2$ معادلې او د $y = 2x - 1$ مستقيمې کرښې شکلونه رسموو.



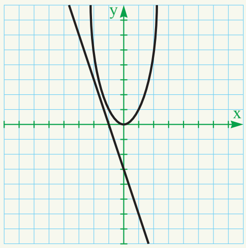
$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$$

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	+9	4	1	0	1	4	9

x	0	–1
y	–1	-3

ليدل کېږي چې کرښه له منحني سره په يوه ټکي کې مماس ده چې د x نقطې مختصه (قيمت) د معادلې حل دی.

دريم مثال: د $x^2 + 3x + 3 = 0$ معادلې حل په هندسي لاره پيدا کړئ.



$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 3x - 3 \end{cases}$$

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	+9	4	1	0	1	4	9

x	0	–1
y	–3	0

ليدل کېږي چې مستقيمه کرښه منحني نه قطع ، نو دويمه درجه معادله حل نه لري.

يادونه:

که چيرې منحني په دوو ټکو کې قطع کړي، معادله دوه حله لري.

که چيرې منحني په يوه ټکي کې قطع کړي، معادله يو حل لري.

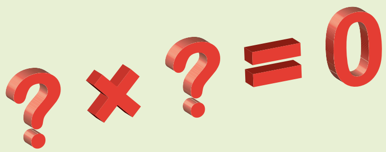
که چيرې منحني قطع يا غوڅه نه کړي، معادله حل نه لري.

پوښتنې

1– د لاندې معادلو حل په هندسي لاره پيدا کړئ.

$a)\ x^2 - 2x + 2 = 0$ $\quad b)\ x^2 - 6x + 8 = 0$ $\quad c)\ x^2 - 5 + 7 = 0$

د یو مجهول دويمه درجه معادلو حل، د تجزيې په لاره(طريقه)



د دوو عددونو د ضرب حاصل، څه وخت مساوي په صفر دی؟

فعاليت

- که a او b دوه حقيقي عددونه وي، څه وخت $a \times b = 0$ کېږي؟
- د $(x-1)(2x+3)$ د ضرب حاصل په پام کې ونيسئ، آيا ويلای شئ چې څه وخت دا حاصل ضرب مساوي په صفر دی؟
- د $2x^2 + x - 3 = 0$ معادله له $(x-1)(2x+3)$ حاصل ضرب سره څه اړيکه لري؟
- د مخکينی لارې(طريقې) څخه په ګټې اخيستنې سره د $2x^2 + x - 3 = 0$ معادلې حلونه پيدا کړئ او د $(x-1)(2x+3) = 0$ معادلې له حلونو سره يې پرتله کړئ؟

د پورتني فعاليت پايله په لاندې ډول په لاس راوړو:

پايله: که وغواړو، چې دويمه درجه معادله، د دوو خطي افادو د ضرب د حاصل په شکل واړوو، نو په دې حالت کې، د معادلې حل ساده کېږي چې په لاندې ډول عمل کوو:

- د اعدادو له خاصيتونو څخه پوهېږو چې د دوو عددونو د ضرب حاصل هغه وخت صفر دی چې يو د هغوی له ضربي اجزاوو څخه يو مساوي په صفر وي، دا مسأله د الجبري افادو لپاره هم سمه ده.
- د هرې خطي يا کرښه ايزې الجبري افادې حل چې د يوې دويمې درجې معادلې مساوي ده، د دويمې درجه معادلې حل دی.

لومړی مثال: د $x^2-7x+6=0$ معادلې حل د تجزیې په مرسته په لاس راوړئ.

حل: د x^2-7x+6 له تجزیې څخه لرو چې:

$$x^2-7x+6=(x-1)(x-6)=0$$

د نومورې ضرب حاصل هغه وخت صفر دی چې یو د هغو فکتورونو څخه مساوي په صفر وي او یا دواړه صفر وي یعنې:

$$1)\ \ x-1=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=1$$

$$2)\ \ x-6=0 \quad\Rightarrow\quad x_2=6$$

نو 1 او 6 د $x^2-7x+6=0$ معادلې حلونه دي.

دويم مثال: د $2x^2-5x-3=0$ معادلې حل د تجزیې په لاره پیدا کړئ.

حل: تر اوسه مو هغه معادلې په فکتورونو تجزیه کړې، چې د x^2 ضریب (1) و، خو د هغو معادلو چې د x^2 ضریب یې یو نه وي، په لاندې ډول یې بدلوو، د دې لپاره چې د x^2 ضریب یوه بشپړه مربع شي، نو د معادلې دواړه خواوې د x^2 په ضریب کې ضربوو:

$$A=2x^2-5x-3$$

$$2A=4x^2-10x-6=(2x)^2-5(2x)-6$$

$$2A=(2x+1)(2x-6)$$

$$A=\frac{1}{2}(2x+1)(2x-6)$$

$$A=(2x+1)(x-3)$$

او د A د معادلې د حل لپاره لرو:

$$1)\ \ 2x+1=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=-\frac{1}{2}$$

$$2)\ \ x-3=0 \quad\Rightarrow\quad x_2=3$$

پوښتنې

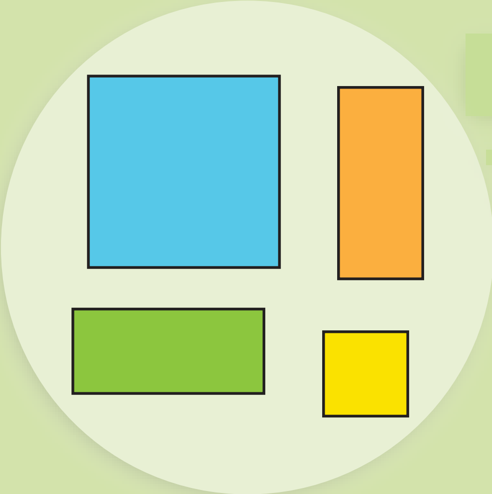
لاندې معادلې د تجزیې په لاره حل کړئ.

1) $x^2+4x+3=0$

2) $x^2+x-2=0$

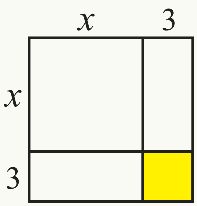
3) $x^2-6x+8=0$

د دويمې درجې معادلې حل د تکميل مربع په طريقه



هڅه وکړئ چې د دې شکلونو په يو ځای کېدو سره يوه لويه مربع جوړه کړئ.

فعاليت



- د لويې مربعې د ضلعې اوږدوالی څومره دی؟
- د هرې برخې مساحت، د شکل پر مخ وليکئ.
- د $x^2+6x-40=0$ معادله داسې ترتيبوو چې متحول لرونکي حدونه، يو اړخ او ثابت عددونه د مساوات بل اړخ ته نقلوو.
- متحول لرونکې الجبري افاده له رنګ شوې مساحت سره څه اړيکه لري؟
- د مستطيلونو د مساحت عددي ضريب، د دويمې درجې معادلې د x له ضريب سره څه اړيکه لري؟
- د لويې مربع مساحت څومره دی؟
- د دې لپاره چې د متحول لرونکې الجبري افادې د لويې مربع د مساحت سره برابره شي، کوم عدد، د تساوي دواړو خواوو ته ورزيات کړو؟
- له پورته لاس راغلې اړيکې څخه د x قيمت (د دويمې درجه معادلې حل) په لاس راوړو.

محمد بن موسی دا لاره(طريقه)، د دويمې درجې معادلې لپاره پيدا کړله. د دې طريقې په پوره کېدو سره د دويمې درجې د معادلو په حل کې په بشپړه توګه ګټه اخيستل کېږي، په دې روش کې د $x^2+bx+c=0$ دويمه درجه معادله په $(x+p)^2=q^2$ بڼه بدلېږي چې د تجزيې پراوونه يې عبارت دي له:

• لومړی p د x د ضریب له نیمايي سره وضع کوو، یعنې $P=\frac{b}{2}$

• وروسته $q^2=-c+(\frac{b}{2})^2$ وضع کوو.

• په پای کې د $x+p=q$ معادله لرو.

لومړی مثال: د $x^2+2x-8=0$ معادله د تکمیل مربع په تګ لاره حل کړئ؟

حل: لومړی معادله په لاندې ډول لیکو:

$$x^2+2x=8$$

د x د ضریب نیمايي په لاس راوړو، مربع یې له دواړو خواوو سره جمع کوو:

$$x^2+2x+1=8+1$$

$$(x+1)^2=9$$

$$x+1=3$$

$$x=2$$

یادونـه: ټولـې دویمه درجه معادلې نه شـو کولای پـه دې میتود حل کړو، ځکـه دا میتود هندســي بدلون ته اړتیا لري، نو ځکه په دې میتود نه شـو کولای چې د هغو معادلو حل چې منفي جذرونه لري هم په لاس راوړو.

پوښتنې

لاندې معادلې د تکمیل مربع په تګ لاره حل کړئ؟

$a)\ x^2+8x-24=0$ $\quad b)\ x^2-x-\frac{5}{4}=0$ $\quad c)\ x^2-6x-13=0$

د محمد بن موسی فورمول
یا د تکمیل مربع طریقې د حل پراختیا:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

د $ax^2+bx+c=0$ معادلې دواړه خواوې د x^2 په ضریب ووېشو او وواياست چې مخامخ مساوات حقيقت لري، که نه؟

ومو لیدل چې دویمه درجه معادله په عمومي ډول داسې $ax^2+bx+c=0$ ليکو چې په هغې کې a, b او c حقيقي عددونه او a د صفر خلاف يو عدد دی، د دې معادلې د حل لپاره داسې عمل کوو:

- د $ax^2+bx+c=0$ معادلې دواړه خواوې په a وېشو: $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$
- ثابت عددونه، د مساوات يو خوا او مجهول حدونه، د مساوات بلې خوا ته نقلوو، د x د ضريب د نيمايي مربعې دواړو خواوو ته جمع کوو:

$$x^2+\frac{b}{a}x+(\frac{b}{2a})^2=(\frac{b}{2a})^2-(\frac{c}{a})$$

$$(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

د لنډې ليکنې لپاره b^2-4ac په Δ سره ښيوو.

فعاليت

هره دويمه درجه معادله چې $ax^2+bx+c=0$ بڼه ولري، لاندې پوښتنو ته ځوابونه ووايئ:

1- که $\Delta=b^2-4ac=0$ وي، نو په دې صورت کې د معادلې حلونه کوم دي؟

2- که $\Delta=b^2-4ac>0$ وي، نو په دې صورت کې د معادلې حلونه کوم دي؟

3- که $\Delta=b^2-4ac<0$ وي، نو د حلونو د لرلو په صورت کې د معادلې حلونه کوم دي.

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايله په لاس راځي:

لومړۍ پايله: د $ax^2+bx+c=0$ دويمې درجه معادلې چې a, b او c حقيقي $a\neq 0$ وي.

د $\Delta = b^2 - 4ac$ چې د قاسمي په نوم یادېږي، له مخې لرو:

1- که $\Delta > 0$ وي، معادله دوه بېلابېل حلونه لري چې عبارت دي له:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad , \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

2-که $\Delta = 0$ وي، معادله دوه مساوي یا مضاعف حلونه لري چې عبارت دي له: $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$

3- که $\Delta < 0$ وي، معادله د حقیقي عددونو په سېټ کې حل نه لري.

دویمه پایله: د حلونو د جمع او ضرب حاصل

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

د جذرونو د جمع او ضرب له حاصل څخه کولای شو د دویمې درجه معادلې په تجزیه کولو کې ګټه واخلو.

لومړی مثال: د $x^2 - 3x + 1 = 0$ معادلې حلونه پیدا کړئ.

حل: لومړی د Δ قیمت پیدا کوو: $\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4\times1\times1 = 5$

څرنګه چې $\Delta > 0$ ده، نو معادله دوه بېلا بېل حلونه لري.

$$x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad , \quad x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

دویم مثال: د $9x^2 - 12x + 4 = 0$ حلونه پیدا کړئ.

حل: لرو چې: $\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - (4\times9\times4) = 144 - 144 = 0$

څرنګه چې $\Delta = 0$ ده، معادله دوه مساوي حلونه لري:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = \frac{12}{2\times9} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

دریم مثال: د $5x^2 + 2x + 1 = 0$ معادله حل کړئ.

حل: نوموړې معادله د حقیقي عددونو په سېټ کې حل نه لري، ځکه $\Delta < 0$ څخه ده یعني
$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4\times5\times1 = 4 - 20 = -16$

څلورم مثال: د $4x - 3x - 1 = 0$ معادلې د جذرونو د جمع او ضرب حاصل پیدا کړئ.

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{3}{4} \quad , \quad x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-1}{4}$$

پوښتني

لاندې معادلې حل کړئ

a) $x^2 + 4x - 21 = 0$ b) $x^2 + 6x + 9 = 0$ c) $3x^2 - 12x + 60 = 0$

د اووم څپرکي لنډیز:

- د دویمې درجه معادلې عمومي بڼه د $ax^2+bx+c=0$ چې $a\neq 0$ ډول ده.
- هغه معادلې چې د $ax^2+c=0$ او $ax^2+bx=0$ په ډول وي، د دویمې درجې نیمګړي معادلې په نامه یادیږي.
- د $ax^2+bx=0$ معادلې حل عبارت دی له $x_1=0$ او، $x_2=-\frac{b}{a}$.
- هره دویمه درجه معادله، له دوو برخو(مستقیمه کرښه او یوه منحني) جوړه شوې ده.
- که یو مستقیم منحني په دوو ټکو کې قطع معادله دوه حله لري.
- که یو مستقیم له منحني سره مماس وي، معادله دوه مساوي حلونه لري.
- که مستقیمه کرښه له منحني سره تقاطع ونه لري، معادله په حقیقي عددونو کې حل نه لري.
- د دوو قوسونو د ضرب حاصل هغه وخت مساوي په صفر دی، چې لږ تر لږه یو یې مساوي په صفر وي.
- د حلونو د جمع حاصل له دې اړیکې څخه $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ او د حلونو د ضرب حاصل له دې اړیکې $x_1\times x_2=\frac{c}{a}$ څخه په لاس راځي.
- په بشپړ ډول، د هرې دویمې درجې معادلې جذرونه یا حل $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ فورمول څخه په لاس راځي چې $\Delta=b^2-4ac$ دی.
- که چیرې $\Delta>0$ وي، معادله دوه بېلابېل حلونه لري.
- که چیرې $\Delta=0$ وي، معادله دوه مساوي حلونه لري.
- که چیرې $\Delta<0$ وي، معادله د حقیقي عددونو په set کې حل نه لري.
- د دویمو درجو معادلو د تشکیل لپاره $x^2-(x_1+x_2)x+x_1\cdot x_2=0$ یا $(x-x_1)(x-x_2)=0$ څخه ګټه اخلو.

د اووم څپرکي پوښتنې

• په لاندې سوالونو کې هر سوال ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب يې وټاکئ.

1- د $4x = 3x^2$ معادلې b, a او c ضريبونه عبارت دي له:

الف) $a = 3 \;,\; b = 4 \;,\; c = 1$ ب) $a = -3 \;,\; b = 4 \;,\; c = 1$

ج) $a = 4 \;,\; b = 3 \;,\; c = -1$ د) هېڅ يو.

2- د $3x^2 - 8x + 5 = 0$ معادلې حلونه عبارت دي له:

الف) $x_2 = \frac{5}{3} \;,\; x_1 = 1$ ب) $x_1 = -\frac{5}{3} \;,\; x_2 = 1$

ج) الف او ب د) هيڅ يو.

3- د $y = x^2$ معادلې ګراف عبارت دی له:

الف) مستقيم دی. ب) منحني دی.

ج) الف او ب. د) هيڅ يو.

4- د $x^2 - 10x + 16 = 0$ معادلې د حلونو د جمع حاصل برابر دی له:

الف) $x_1 + x_2 = 5$ ب) $x_1 + x_2 = -5$

ج) $x_1 + x_2 = 8$ د) $x_1 + x_2 = 10$

5- که $\Delta > 0$ څخه وي معادله:

الف) دوه مساوي حلونه لري. ب) دوه حقيقي او مختلف حلونه لري.

ج) حل نه لري. د) يو حل لري.

• تش ځايونه ډک کړئ:

1- د يو مجهوله دويمه درجه معادلو عمومي بڼه .... ده.

2- $-\frac{b}{a}$ د حلونو .... او $\frac{c}{a}$ د حلونو .... دی.

3- که .... وي، معادله حل نه لري.

4- که د معادلې درجه دوه وي، معادله .... لري.

5- د $x^2 - x + 0.25 = 0$ معادلې حلونه .... او .... دی.

• لاندې پوښتنې ولولئ د سم په مخ کې(س) او د ناسم په مخ کې(غ) کلمه وليکئ.

1 - (   ) که $b^2-4ac<0$ وي، معادله د حقيقي عددونو په set کې حل نه لري.

2 - (   ) د محمد بن موسی فورمول $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ دی.

3 - (   ) د $2x^2-4x=0$ معادلې يو حل، صفر دی.

4 - (   ) د دويمې درجه معادلې د تشکيل لپاره $x^2-(x_1+x_2)x+x_1\cdot x_2=0$ څخه گټه اخلو.

5 - (   ) که چېرې په يوه دويمه درجه معادله کې د علامو تحول نه وي، نو معادله يو منفي حل لري.

• لاندې پوښتنې حل کړئ:

1- په لاندې معادلو کې a, b او c ضريبونه و ښيئ او وواياست کومه معادله بشپړه او کومه معادله نيمگړې ده.

$a)\ 3x^2-4x+1=0$ $\quad b)\ 3x^2-1=0$ $\quad c)\ 2x^2-6x=0$

2- د لاندې معادلو حل پيدا کړئ.

$a)\ 3x^2+x-4=0$ $\quad b)\ x^2+4x-32=0$ $\quad c)\ 6x^2-x-2=0$

3- لاندې معادلې د تجزيې په لار(طريقه) حل کړئ.

$a)\ 3x^2-3x-4=0$ $\quad b)\ x^2+4x-32=0$

$c)\ x^2-2\sqrt{3}\,x+3=0$ $\quad d)\ cx^2-2acx+ca^2=0$

4- لاندې معادلې په هندسي تگ لاره يې سره حل کړئ.

$a)\ 2x^2+7x-1=0$ $\quad b)\ x^2-2x+1=0$

5- لاندې معادلې د تجزيې په طريقه حل کړئ.

$a)\ 4x^2+3x-1=0$ $\quad b)\ x^2+\dfrac{x}{5}=\dfrac{6}{5}$

$c)\ 2x^2+3x+1=0$ $\quad d)\ x^2+3x=0$

6- لاندې معادلې له عمومي فورمول څخه په ګټې اخيستنې سره حل کړئ.

$a)\ 7x^2-8x+1=0$ $\qquad$ $b)\ x^2-3x+2=0$

$c)\ t^2-0.27+0.6t=0$

7- که د يوه مستطيل مساحت $20cm^2$ او اوږدوالی د سور دوه برابره وي، د مستطيل اوږدوالی او سور پيدا کړئ؟

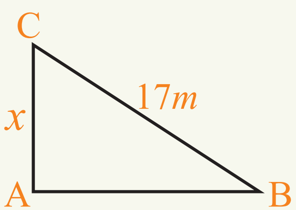
8- که د يوه قايم الزاويه مثلث د قايمو ضلعو اوږدوالی $2a$ او $2a+1$ وي، د وتر اوږدوالی يې پيدا کړئ؟

9- که ديوه مستطيل مساحت $24cm^2$ او محيط يې $36cm$ وي، اوږدوالی او سور يې پيدا کړئ؟

10- هغه معادلې وليکئ چې حلونه يې په لاندې ډول دي.

$a)\ -2, 0.5$ $\qquad$ $b)\ 3, -1$ $\qquad$ $c)\ 0, 2$ $\qquad$ $d)\ \sqrt{2}-1, 2$

11-دوه تنه بايسيکل چلوونکي، A ټکي څخه يو ختيځ لور ته او بل شمال لورته حرکت وکړ، په هغه وخت کې چې د دوی تر منځ واټن $17m$ دی، هغه بايسيکل چلوونکی چې ختيځ لور ته يې حرکت کړی دی $7m$ زيات واټن يې له هغه تن څخه چې شمال لور ته يې حرکت کړی وهلی دی. د هغه الجبري معادلې په واسطه د هر يوه بايسيکل چلوونکی د وهل شوي لارې واټن معلوم او ويې وليکئ.



اتم خپرکی
احصائیه



د ډېټا(Data) د دسته بندۍ لاره



آیا تاسې په خپل ټولګي کې تر ټولو جګه ونه لرئ؟ که چېرې فلپین او یا اندونیزیا ته ولاړ شئ، څنګه؟
په کومه کچه په یوه هېواد کې جګ او په بل هېواد کې لنډې ونې شـــمېرل کېږي؟ معیارونه یې کوم دي؟

فعالیت

د یو شمېر کورنیو شمېر چې په څو کلیو کې پرتې دي، د کلیو په اړه یې په لاندې ډول لیکل شوي اطلاعات په لاس راغلي:

52	49	40	42	45	53	35	38	40	43
51	55	38	39	44	37	46	41	50	56

غواړو دا راکړل شوې ډېټا data، په دریو صنفونو کې داسې ځای پر ځای کړو، تر څو پوه شو، چې کوم کلی ډېر، منځنی او کم وګړي لري.

- آیا کولای شو چې یو یا څو ورکړل شوې ډېټا data له منځه یوسو؟
- تر ټولو لویې او تر ټولو کوچنۍ کورنۍ پیدا کړئ.
- د لږو او ډېرو ډېټاګانو data تر منځ وسعت (پراخوالی) څومره دی؟
- دا وسعت، د صنفونو په شمېر ووېشئ. فکر وکړئ، دا عدد څه شی راښيي؟
- له عددونو څخه په ګټې اخیستنې سره جدول ډک کړئ.
- میله یي ګراف یې رسم کړئ.

د کورنیو شمېر	د کلیو شمېر f
35 - 41	
42 - 48	
49 - 56	

د ډېټا data د صنف بندي کولو لپاره لاندې ګامونه په وار سره تر سره کړئ.

- د ډېټاګانو د زیات مقدار او کم مقدار وسعت په لاس راوړئ.
- دا وسعت د دستو په تعداد وویشئ او د صنفونو اوږدوالی په لاس راوړئ، که چېرې حاصل يې طبيعي عدد نه وي، کولای شئ هغه(round up)کړئ.
- له دې مقدارونو څخه صنفونه جوړ کړئ.

مثال: په لاندې جدول کې د 30 روغتونونو ناروغان چې په اټکلي ډول نیول شوي، داسې راغلي دي:

152	151	152	160	157	140	161	165	163
164	166	170	172	174	154	146	153	149
172	175	165	172	170	169	146	158	177
160	165	168						

دا ډېټا په يې څلورو صنفونو کې ځای پر ځای کړئ.

- که چیرې د ناروغانو شمېر په یوه روغتون کې له 175 څخه زیات وي، هغه روغتون ته ازدهامي(ګڼه ګوڼه) يي روغتون وايي. څو روغتونونه ازدهامي(ګڼه ګوڼه) دي؟
- د ګڼه ګوڼې د پرتله کولو لپاره میله يي ګراف رسم کړئ.

حل: د دې لپاره چې ډاډه شو، ټول ارقام په یوه جدول کې ځای پر ځای کوو او تر ټولو زیات او تر ټولو کم ارقام يې په لاس راوړو.

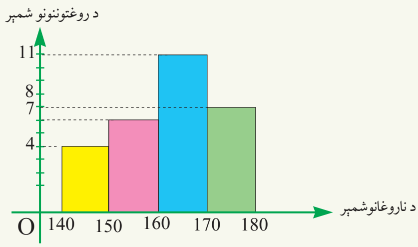
ترټولو ټیټ رقم $= 140$

تر ټولو لوړ رقم $= 177$

تیټ رقم − لوړ رقم $= 177 - 140 = 37$

د صنفونو د اوږدوالي دپیدا کولو لپاره دا وسعت د صنفونو په شمېر وېشو $\frac{37}{4} = 9.25$ له دې عدد څخه د صنف په وسعت کې ګټه اخلو، خو د کار د آسانۍ لپاره دا عدد رونډ اپ په پام کې نیسو چې په دې ډول، د صنف وسعت د(10) عدد په لاس راځي.

د ناروغانو شمېر	د روغتونونو کثرت f
$140-150$	4
$150-160$	7
$160-170$	11
$170-180$	8
	$n = 30$



پاملرنه وکړئ، که چېرې د صنف پراخوالی پورته خوا پوره په پام کې و نه نیسو، یعني رونډ اپ(Round up) يې نه کړو، د صنفونو د پراخوالي مجموعه، له 37 څخه لږ په لاس راځي چې په دې ډول یو شمېر ډېټا له جدول څخه خارجیږي او دا سم کار نه دی.

په ځینو وختونو کې د صنفونو د شمېر پر ځای، د صنفونو پراخوالی موږ ته پېژندل شوي وي، په دې حالت کې د صنفونو شمېر موږ ته اهمیت نه لري. د صنفونو د پراخوالي په لرلو سره داسې لیکو چې د هغو پراخوالی د فرض شویو صنفونو سره برابر وي او وروسته يې جدول پوره کوو.

مثال: په پورتني مثال کې که د صنفونو پر ځای د صنفونو پراخوالی 8 فرض کړو، اوسط يې پیدا کړئ؟

حل: ټیټ رقم یعني 140 څخه پیل کوو. څرنګه چې د صنف پراخوالی 8 دی، د دوو لاندې پرله پسې سرحدونو تر منځ واټن باید 8 وي، یعني د دویم صنف لاندنې سرحد باید 148 وي. اته، اته تر هغه زیاتوو، تر څو ډېره ډېټا په جدول کې ځای پر ځای شي په دې توګه، تر پایه دوام ورکوو.

د ناروغانو شمېر	د رغتونونو شمېرf
140 – 147	3
148 – 155	6
156 – 163	6
164 – 171	9
172 – 179	6
	n = 30

پوښتنې

1- لاندې ډېټا د 20 زده کوونکو د رسېدلو وخت په دقیقو له کوره تر ښوونځی راښیي:

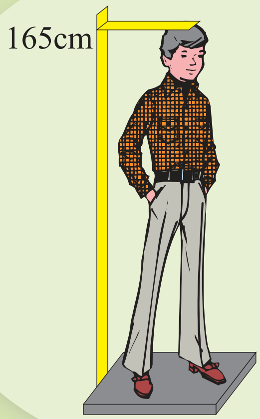
10	50	65	33
48	5	11	23
37	26	26	32
17	7	13	19
29	43	21	22

- پورتنی ډېټا په اووه ډلوکې صنف بندي کړئ؟
- د هر صنف کثرت پیدا کړئ.
- میله یي گراف یې رسم کړئ.
- که چېرې ډېټا په هغو ډلوکې چې د صنف پراخوالی یې 10 وي کېږدو، د کثرت جدول یې جوړ کړئ؟

2- یو مثال راوړئ چې ډېټا د صنف بندي لپاره د صنفونو له پراخوالي څخه گټه اخیستل شوې وي.

3-د موضوع د خبرلو لپاره یو مثال ورکړئ چې د ډېټا د صنف بندي لپاره، د صنفونو له شمېر څخه گټه اخیستل شوې وي.

د نښتو یا متصلو ډېټا ګانو دسته بندي



که چېرې له تاسې څخه پوښتنه وشي چې ونه (قد) مو څومره جګه ده، څه ځواب ورکوئ؟که ستاسوقد په متر اندازه شي ستاسو له اټکل سره به څومره سمون ولري؟

فعالیت

- که له تاسې څخه پوښتنه وشي چې څو ورونه لرئ، څه وایئ؟ آیا کولای شئ، ادعا وکړئ چې د دغه ډول پوښتنې په ځواب او یا نورو عمومي پوښتنو چې لا تیک وسایل مو لرلي، کولای مو شول چې د خپلو ټولګیوالو شمېر په ټیک ډول و وایئ؟
- ناڅاپي متحول مو څه شی دی او له کومو ډولونو څخه دی؟
- که ستاسې یو دوست ووایي، د قد اوږدوالی یې 156 سانتي متره دی، آیا د ونې(قد) اوږدوالی یې پوره 156 سانتي متره دی؟
- د 15 زده کوونکو د قدونو اوږدوالي وروسته له پوښتنې څخه داسې ورکړل شوي دی.

153	148	151	138	136
142	131	141	141	139
152	159	139	132	146

لاندې جدول بشپړ کړئ:

د زده کوونکو د ونې جګوالی	د زده کوونکو شمېر f
130 – 140	
140 – 150	
150 – 160	

- په فکر وکړئ او ووایئ، چې ولې د 140 عدد یو وار د صنفونو د پورتني سرحد په څېر او یو وار د صنفونو د لاندېني سرحد په څېر راوړل شوي دي؟
- که چېرې د یوه سړي د قد اوږدوالی 140 سانتي متره وي، څه فکر کوئ چې په کوم صنف کې به وي؟

که چېرې یو نښتي یا متصل متحول ولرو، د اطلاعاتو په صنف بندۍ کې د یوه صنف پورتنی سرحد به له کوزني سرحد سره برابر وي، د قرارداد له مخې که ډیټا د پورتني صنف سره برابره وي، په ورپسې سرحد کې لوېږي.

مثال: د 25 ډول ډول موټرونو چټکتیا په لاندې ډول احصائیه نیول شوې ده:

32	35	38	47	44	48	28
30	40	36	51	52	54	31
27	32	42	52	31	29	29
54	49	37	43			

• د کثرت جدول یې ډک کړئ.

• که چېرې په ښار کې د چلولو پرمهال مجاز سرعت په یوه ساعت کې 30 کیلومتره وي، څو موټرونه د چټکتیا له مجاز سرعت څخه زیات چلېدلي دي؟

• د صنفونو د کثرت د جمع حاصل څو دی؟ دا عدد له څه شي سره برابر دی؟

حل: څرنګه چې سرعت یو متصل متحول دی، نو د نښتي یا متصل متحول لپاره جدول جوړوو. د 30 عدد په دویم صنف کې او د 40 عدد په درېیم صنف کې لوېږي، د صنفونو د کثرت جمع له $n=4+9+7+5=25$ سره برابره ده چې د موټرونو له شمېر سره مساوي ده او (21) موټرونه له خپل جواز څخه چټک چلیدلي دي.

سرعت	تعداد f
20 – 30	4
30 – 40	9
40 – 50	7
50 – 60	5
	25

پوښتني

1- لاندې ډېټاګانې چې د 34 زده کوونکو د هوش ضریب، د ښوونځي په لومړي کال کې راښیي، په پام کې ونیسئ:

86	108	108	111	111	103	108	101	88
91	103	105	105	112	96	111	107	96
92	100	112	112	92	89	95	90	105
111	95	108	77	106	90	77		

د 4 صنفي جدول په جوړولو سره د صنفونو د کثرت د جمع حاصل پیدا کړئ.



وزني اوسط یا منځنی قیمت
(Weighted Mean)

که څوک ښه کار سرته ورسوي، انعام یې
نظر کوم عدد ته څو برابره دی؟

فعالیت

اوریدلي مو دي چې هغه زده کوونکی چې دولسم ټولگی پای ته ورسوي، د کانکور آزموینه په څلورو
څانگو کې له خاصو ضریبونو سره سرته رسوي او د هغې د نمرو په اساس د پوهنتونونو بیلابیلو پوهنځیو
ته وېشل کېږي. اټکل کوو چې د دوو زده کوونکو د کانکور نمرې په لاندې ډول دي:

مضمون	ژبه او ادبیات د 3 په ضرب	ټولنیز علوم د 2 په ضرب	طبیعي علوم د 3 په ضرب	ریاضي د 4 په ضرب
ضریب	3	2	3	4
لومړی زده کوونکی	61	66	62	61
دویم زده کوونکی	61	66	62	60

مضمون	د دویم زده کوونکي نمبرې	ضریب
ریاضي	60	4
طبیعي علوم	62	3
ټولنیز علوم	66	2
ژبه او ادبیات	61	3

مضمون	د لومړي زده کوونکي نمبرې	ضریب
ریاضي	61	4
طبیعي علوم	62	3
ټولنیز علوم	66	2
ژبه او ادبیات	61	3

- د دواړو زده کوونکو د نمرو منځنی یا وسطي قیمت پیدا کړئ.
- د کوم مضمون نمرې په منځني یا وسطي قیمت ډېره اغیزه لري، ولې؟
- د کوم مضمون نمرې په منځني یا وسطي قیمت لږ اغیزه لري، ولې؟
- که د زده کوونکو د ریاضي د مضمون په نمرو 5 نمرې او همدارنگه د ټولنیزو علومو په مضمون 5 نمرې ور زیاتې شي، منځنی یا وسطي قیمت، په کوم حالت کې ډېر بدلون مومي.

که چېرې ډېټا په ځانګړې ضریب سره ورکړل شوې وي، دا په دې معنا ده چې د ډېټا اغېزه یوشان نه ده، بلکې د هغې له ضریب سره تړاو لري. په دې حالت کې د ضریبونو د کثرت جدول، د ډېټا د کثرت په عنوان حسابېږي او په W سره ښودل کېږي. په لاس راغلي اوسط ته، وزني اوسط وایي:

$$\text{وزني اوسط}\ \bar{x} = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \ldots + w_n x_n}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n}$$

مثال: په ځینو پوهنتونونو کې نمرې د تورو په اساس، لکه: A, B, C, D او F اعلانېږي، په دې پوهنتونونو کې د A ارزښت څلور، د B ارزښت درې، د C ارزښت دوه، د D ارزښت یو او د F ارزښت صفر وي، یوه محصل لاندې نمرې اخیستې دي.

مضمون	نمرې	د کریډټونو شمېر
ریاضیات	B	3
فزیک	A	3
کیمیا	C	2
بیولوژي	B	3
ژبه	A	1

– د دې محصل د نمرو اوسط څو دی؟

حل:

مضمون	حرفي نمره	د کریډټو شمېر =X	عددي نمرې =W	W · X
ریاضیات	B	3	3	$3 \times 3 = 9$
فزیک	A	3	4	$4 \times 3 = 12$
کیمیا	C	2	2	$2 \times 2 = 4$
بیولوژي	B	3	3	$3 \times 3 = 9$
ژبه	A	1	4	$4 \times 1 = 4$

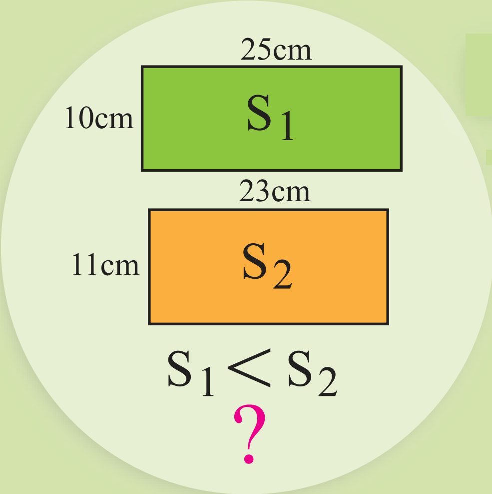
د کریډټونو شمېر $n = 12$

$$\text{وزني اوسط یا منځنی} = \bar{x} = \frac{9+12+4+9+4}{12} = \frac{38}{12} = 3.16$$

پوښتنې

که د کانکور په یوه آزموینه کې د یوه زده کوونکي نمرې په ترتیب سره 65,61,53 او 70 او ضریبونه یې، په ترتیب سره 3,2,1,1 وي، د دې زده کوونکي د نمرو اوسط حساب کړئ؟

مستطيلي ګراف
(Histogram)

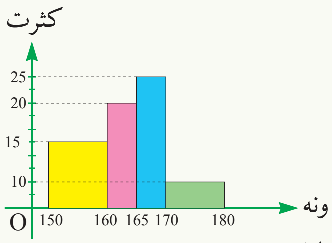


که د یوه مســتطیل اوږدوالی 25 ســانتي متــره او ســور یې 10 ســانتي متــره او د بل مســتطیل اوږدوالی 23 ســانتي متره او ســور یې 11 ســانتي متره وي، د دې دواړو مستطیلونو مساحتونه پیدا او یو له بل سره یې پرتله کړئ؟

فعالیت

د یوه ښوونځي د 70 زده کوونکو د ونو(قدونو) اندازه، په لاندې ډول، په جدول کې ورکړل شوې ده:

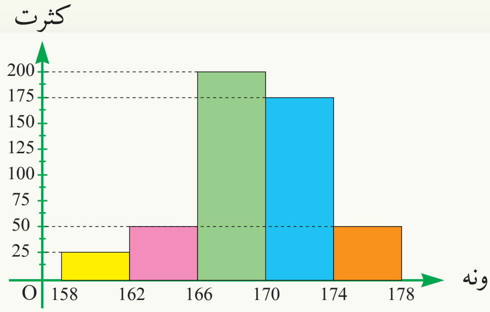
ونه په سانتي	150 – 160	160 – 165	165 – 170	170 – 180
کثرت f	15	20	25	10



- په پورتني ګراف کې د مستطیلونو قاعدې څه شی راښيي؟
- د هر مستطیل مساحت په لاس راوړئ. د مستطیل مساحت څه شی راښيي؟
- د مستطیلونو ارتفاع څه شی راښيي؟
- پورتنی ګراف، له میله یي ګراف سره څه توپیر لري؟

یو ځل بیا د یوه ښوونځي د 500 زده کوونکو ونې (قد) چې اندازه یې په لاندې جدول کې ورکړ شوې ده، په پام کې ونیسئ:

ونه په سانتي متر	158 – 162	162 – 166	166 – 170	170 – 174	174 – 178
کثرت f	25	50	200	175	50



- جدول ته په پاملرنې سره، د مستطیل قاعده څه شی راښیي؟
- د مستطیل اوږدوالی څه شی راښیي؟
- میله یي ګراف له پورتني ګراف سره څه توپیر لري؟

د نښتو یا متصلو ډیټاګانو د ښودلو لپاره له مستطیلي ګراف څخه ګټه اخلو، په دې ګراف کې، د مستطیل عرض، د صنفونو له پراخوالي سره برابر دی. په مستطیلي ګراف کې مساحتونه، د هر صنف کثرت راښیي چې په آسانۍ یو له بل سره د مقایسې وړ دي.

که د صنف پراخوالي یو له بل سره برابر وي، کولای شو د مساحتونو پر ځای راساً کثرت پرتله کړو په دې حالت کې عمودي محور، کثرت راښیي.

مثال: د یوه ټولګي د زده کوونکو وزن په لاندې جدول کې راکړل شوی دی:

د زده کوونکو وزن په کیلوګرام	40 - 45	45 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 90
د زده کوونکو شمېر	4	6	12	8	8

دلته لیدل کېږي چې د صنفونو واټن مساوي نه دي، د مستطیلي ګراف له رسمولو څخه مخکې لازمه ده چې د مستطیلونو ارتفاع یوه ګډه واټن ته په پام کې نیولو سره د ټولو صنفونو لپاره پیدا کړو، په دې مثال کې $5Kg$ ګډ یا مشترک دی، نو کولای شو چې ټول پنځه واره واحده، د x په محور په یوه واحد وښیو:

د $40-45$ صنف لپاره یو واحده.

د $45-50$ صنف لپاره یو واحده.

د $50-60$ صنف لپاره دوه واحده.

د $60-70$ صنف لپاره دوه واحده.

د $70-90$ صنف لپاره څلور واحده.

د مستطیلونو د عمودي اوږدوالي د پیدا کولو لپاره، د صنفونو کثرت، د صنفونو په پراخوالي وېشو:

$$40-45 \rightarrow \frac{4}{1} = 4 \rightarrow \frac{4}{5} = 0.8$$

$$45-50 \rightarrow \frac{6}{1} = 6 \rightarrow \frac{6}{5} = 1.2$$

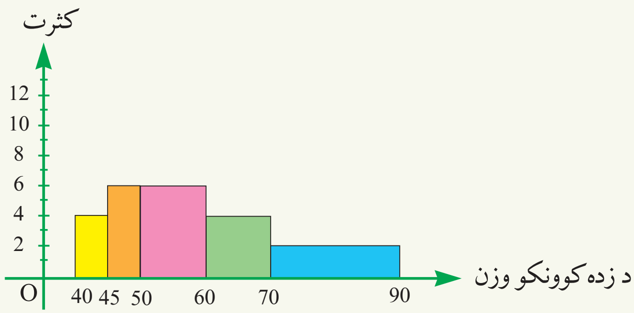
$$50-60 \rightarrow \frac{12}{2} = 6 \rightarrow \frac{12}{10} = 1.2$$

$$60-70 \rightarrow \frac{8}{2} = 4 \rightarrow \frac{8}{10} = 0.8$$

$$70-90 \rightarrow \frac{8}{4} = 2 \rightarrow \frac{8}{20} = 0.4$$

اوس په لاس راغلي پایلې په لاندې جدول کې ترتیب او د راکړل شوي مثال مستطیلي ګراف رسموو:

د زده کوونکو وزن په Kg	40-45	45-50	50-60	60-70	70-90
کثرت نظر واحد فاصلې ته	4	6	6	4	2



پوښتنې

1- لاندې جدول د یوه روغتون د هغو ټاکلو ورځو د ناروغانو شمېر راښیي چې په روغتون کې بستر شوي دي:

د ورځو شمېر	1 - 5	5 - 9	9 - 13	13 - 17	17 - 21	21- 25
د ناروغانو شمېرf	12	10	16	18	14	8

ـ د پورتني جدول مستطیلي ګراف رسم کړئ؟

2- د یوه ټولګي د 50 زده کوونکو د IQ (ذکاوت) په آزموینه کې ګډون کړی دی چې پایلې یې په لاندې ډول دي:

115	113	109	118	92	130	112	114	117	122
127	107	108	113	124	112	111	106	116	118
121	107	118	118	110	124	115	103	100	114
104	124	116	123	104	135	121	126	116	110
94	134	98	129	102	103	107	113	117	112

– نوموړو ډېټا ته د کثرت جدول جوړ کړی. د دې جدول لپاره ۷ ګروپونه داسې په پام کې ونیسئ چې د صنفونو پراخوالی یې مساوي وي.

– د دې ډېټا مستطیلي ګراف رسم کړئ.

– څه پایلې اخلئ؟

دايروي ګراف



مخامخ شکل، د لرګي يوه کنده ده، هغه کرښې چې ددې لرګي په مقطع کې وينئ، د څه شي شکل ته ورته دی؟

فعاليت

د افغانستان د ښوونې او روزنې وزارت په 1387 کال کې لاندې ارقام د ښوونځيو د زده کوونکو د شمېر په اړه خپاره کړي دي: د ابتدايي زده کوونکو شمېر 250000 د منځنيو ښوونځيو د زده کوونکو شمېر 200000 او د ثانوي زده کوونکو شمېر 150000 دی.

- که د هرې ډېټا نسبتي کثرت، په 360° درجو کې ضرب کړو، هره دوره به څو درجې وي؟
- يوه دايره رسم او مرکزي زاويې يې د لاس ته راغلو عددونو په اندازه بېلې کړئ د هرې زاويې دننه د اړونده تحصيلي دورې نوم وليکئ.
- يو عنوان، د ګراف لپاره و ټاکئ او د ګراف لاندې يې وليکئ.
- په دايروي ګراف کې څه، څه سره پرتله کېږي؟
- د دايرې په کوچنې کېدو يا لويېدو سره په دايروي ګراف کې څه توپير راځي؟

له پورتني فعاليت څخه پوه شو او کولای شو ډېټا د دايرې په مرسته وښيو. د يو ناخاپي يا اتفاقي متحول د ډېټا ښودل، د دايرې په مرسته د دايروي ګراف په نامه يادېږي، په دايروي ګراف کې لومړی د هر صنف کثرت د ټولې ډيټا په شمېر وېشو او وروسته يې په 360° کې ضربوو چې د صنفونو مرکزي زاويه راښيي؛ يعنې:

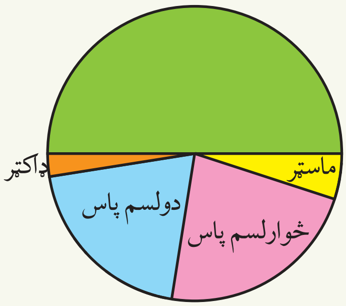
$$\text{له جنسه د درجې کثرت} = \frac{\text{د ډېټا کثرت}}{\text{د ټولو ډېټا شمېر}} \times 360^\circ$$

مثال: يوه مؤسسه چې د کارکوونکو شمېر يې 200 او د تحصيل د درجې له مخې وېشل شوي دي:

دولسم پاس	څوارلسم پاس	ليسانس	ماستر	ډاکتر	د تحصيل درجه
40	45	100	10	5	د کارمندانو شمېر f

د دې ډېټا دايروي ګراف په لاندې ډول دی.

مرکزي زاويه د درجې له جنسه	کثرت f	د تحصيل درجه
$\frac{5}{200} \times 360° = 9°$	5	ډاکتر
$\frac{10}{200} \times 360° = 18°$	10	ماستر
$\frac{100}{200} \times 360° = 180°$	100	ليسانس
$\frac{45}{200} \times 360° = 81°$	45	څوارلسم پاس
$\frac{40}{200} \times 360° = 72°$	40	دولسم پاس



پوښتنې

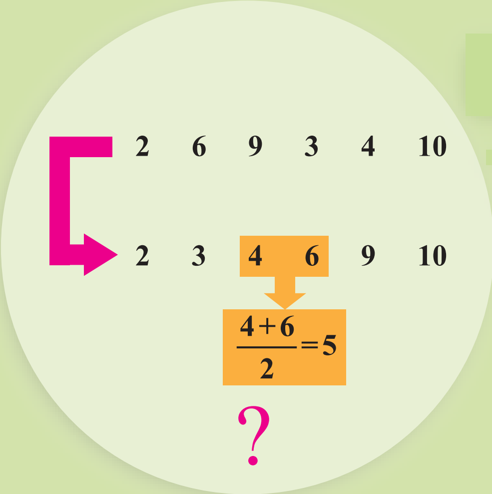
– د لاندې جدول په پام کې نيولو سره د کورنيو د وېش دايروي ګراف د جمعيت له مخې رسم کړئ.

جمع	لږ جمعيت	منځنی جمعيت	ډېر جمعيت سره	د کورنۍ نوع
40	6	23	11	د کورنۍ شمېر f

– دايروي ګراف د څه ډول متحول لپاره مناسب دی؟

- که د ډېټا کثرت دوه برابره کړو، آيا مرکزي زاويه يې بدلون مومي؟

میانه
(Median)



کـه له تاسـي څخه وپوښـتل شـي چي د نومرو اوسـط مو څو دی؟ له اوسط څخه ګټه اخلئ که له تاسـي څخه وپوښتل شي چي هغه نمرې چي ستاسـو په اطلاعنامه کـي ډېـرې تکرار شـوې دي، څـو دي؟ که له تاسـي پوښـتنه وشـي چي تاسـې د شـو زده کوونکـو په منځ کي یاسـت، که د کمـزورو زده کوونکـو پـه منـځ کـي، تاسـې دې پوښتنې ته څه ځواب ورکوئ؟

فعالیت

- فکر وکړئ؟ د((میاني)) لغت یعني څه؟
- که یو شمېر ډېټا ولرو، څرنګه کولای شو، د هغو وسطي مقدار پیدا کړو؟
- که د ډېټا شمېر طاق وي، آیا وسطي مقدار د ډېټا په میانه کې شته دی؟
- که د ډېټا شمېر جفت وي، ایا وسطي مقدار د ډېټا په میانه کې شته دی؟
- آیا کولای شو وسطي مقدار پرته له ترتیب کولو څخه د ډېټا په لاس راوړو؟
- که د ډېټا مقدار جفت وي، اټکل کولای شئ چي څه مقدار د وسطي مقدار په عنوان وټاکو؟
- لاندې ډېټا په پام کې ونیسئ:

2 3 5 1 4

– وسطي مقدار یې پیدا کړئ.
– د ډېټا شمېر، د وسطي مقدار څخه وروسته د مخکینې ډېټا له شمېر سره څه اړیکه لري؟
– لاندې ډېټا په پام کې ونیسئ.

2 3 5 1 4 5

– یو وسطي عدد پیدا کړئ چي د ډېټا شمېر یې وروسته او د مخکنې له هغه عدد د ډېټا له شمېر سره برابر وي.

د ډیټا له ترتیبولو څخه وروسته هغه عدد چي له هغه څخه وروسته د ډیټا شمېر او له هغه څخه مخکې د ډیټا له شمېر سره برابر وي، میانه بلل کیږي. که چیرې د ډیټا شمېر طاق وي، نو منځنی ډیټا له میاني څخه عبارت ده، خو که چیرې د ډیټا شمېر جفت وي، نو میانه د دوو منځنیو ډیټاګانو له وسط څخه

عبارت ده.

مثال: د 5 کورنيو مياشتنى عايد، د افغانۍ له مخې په لاندې ډول راکړل شوی دی:

10000   7000   4000   6000   3000

ددې data ميانه حساب کړئ.

حل: لومړی data مرتب کوو:

3000   4000   6000   7000   10000

ليدل کېږي چې د 6000 عدد د عددونو په وسط(منځ) کې شتون لري، نو 6000 د پورتنی data ميانه ده.

دويم مثال: د لاندېdata ميانه وټاکئ.

2   6   9   3   4   10

حل: د ميانې د حسابولو لپاره عددونه (data) ترتيب کوو.

2   3   4   6   9   10

ليدل کېږي چې د data په منځ کې داسې عدد نشته چې د ميانې خاصيت صدق کړي، نو که چېرې

تاسې $5 = \frac{4+6}{2}$ په پام کې ونيسئ چې د ميانې ځانګړتيا پکې صدق کوي او دا عدد د پورتنی ډيټا

ميانه ده چې له 5 څخه وروسته، د ډيټا شمېر له 5څخه د مخکې د ډيټا له شمېر سره برابر دی.

پوښتنې

1– د ډيټا لاندې دوه ګروپونه، په پام کې ونيسئ او د هغوی ميانه پيدا کړئ؟

1 , 2 , 3   او   0 , 2 ,100

2– لاندې ډيټا راکړل شوې ده، د دغې ډيټا ميانه پيدا کړئ.

5 ,15 , 4 , 0 , 12 , 15 , 5 , 6 , 5 , 0

3- که له ټولو ډيټا وو سره يو ثابت عدد جمع شي، د ميانې په مقدار کې څه اغېزه منځ ته راځي؟ په يوه مثال کې يې وښيئ.

4- که ډيټا دوه برابره کړو، د ميانې په مقدار څه اغېزه کوي؟ په يوه مثال کې يې وښاياست.

د تحول ساحه
(Range)



د خپلو هم ټولګیوالو قد مو اندازه کړئ.
د تر ټولو لوړ قد او تر ټولو ټیټ قد تر منځ توپیر حساب کړئ، که چېرې وغواړئ چې د زده کوونکو د قدونو ترمنځ تر ټولو زیات توپیر پیدا کړئ، آیا لازمه ده چې د نورو زده کوونکو قدونه اندازه کړئ؟

فعالیت

د اووم ټولګي د 10 زده کوونکو او د لسم ټولګي د 10 زده کوونکو د قدونو لوړوالی چې په اتفاقي ډول ټاکل شوي، په لاندې ډول دي:

د اووم ټولګي زده کوونکي : 142 ,145 ,146 ,148 ,148 ,148 ,149 ,149 ,150 , 152

د لسم ټولګي زده کوونکي : 150 ,151 ,153 ,156 ,158 ,158 ,159 ,160 ,160 , 160

- د دواړو ډلو د لوړو او ټیټو قدونو تر منځ توپیر پیدا کړئ؟
- ایا د دواړو ډلو د عددونو تر منځ توپیر یو شان دی؟
- که چېرې ډېټا و نه لرو، آیا د ډېټا د لږو او ډېرو توپیرونو په لرلو سره ډلو موږ کولای شو دواړه ډلې چې سره پرتله کړو.
- ایا د بدلون یا تحول د ساحې برابروالي په دواړو ډلو کې د ډېټا د یووالي په معنا دی؟
- د نمونې د تعریف په پاملرنې سره که دا ډلې، د ټولنې په عنوان په پام کې ونیسو په نمونه کې د واټن د اوږدوالي زیاتوالی، په ټولنه کې د واټن د اوږدوالي د زیاتوالي پایله راکوي.

له پورتني فعالیت څخه پوهېږو چې د هغه واټن اوږدوالی چې متحول په هغې کې د بدلون امکان لري، د تحول د ساحې په نامه یادېږي. دا معیار د تر ټولو لوېې او تر ټولو کوچنې ډېټا ترمنځ وسعت را په ګوته کوي.پاملرنه باید وشي چې په یوه ټولنه کې د تحول د ساحې لوی والی، په هغه ټولنه کې د تیت والي یا پراګندګي ډېر والی دی. هر څومره چې دا تیت والی کم وي، د وګړو پراګندګي کمه ده. د یوې ټولنې وګړي، د دې ځانګړتیا له مخې یو بل ته نژدې دی که د تحول ساحه صفر وي، که د وګړو د څېړنو د ځانګړتیاوې سره برابري او یو شان وي په دې حالت کې ټولنه یوه متجانسه ټولنه بولو.

مثال: د دوو زده کوونکو د $4\frac{1}{2}$ میاشتنی آزموینې نمرې، په لاندې ډول دي:

الف: 20 , 21 , 25 , 32 , 33 , 35 , 36 , 37 , 38 , 39

ب : 20 , 33 , 34 , 35 , 35 , 35 , 34 , 34 , 35 , 39

- د دواړو صنفونو د تحول ساحه پیدا کړئ.
- آیا د ډېټا تیت والی یا پراګندګي په لومړي او که په دویم ګروپ کې کمه ده؟

حل: د دواړو ډلو د تحول ساحه یوه برابر ده.

$$39 - 20 = 19$$

د دویمې ډلې د ډېټا تیت والی یا پراګندګي لږ ده، ځکه په ډېټا کې، د 34 او 35 عددونه زیات تکرار شوي دي، واټن یې کم دی، خو پراګندګي په لومړۍ ډله کې ډېره ده، د تحول ساحه یوازې له لږو او زیاتو مقدارونو سره کار کوي. د ډېټا په اړه او د هغوی تر منځ هېڅ اطلاعات موږ ته نه راکوي، نو د تحول د ساحې په لرلو سره نشو کولای، د ډېټا د میانې د پراګندګي د میزان اټکل وکړو.

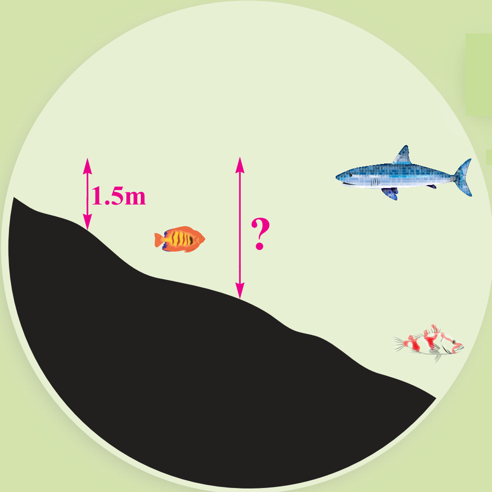
پوښتنې

1- لاندې ډېټا په پام کې ونیسئ.

1 ,2 ,5 ,6 ,6 ,7 ,8 ,9 ,10 ,11 ,15

- ددې ډېټا د تحول ساحه پیدا کړئ.
- که د پورتنی data، تر ټولو زیات او کم data له منځه یوسو، د تحول ساحه یې پیدا کړئ.
- دا دواړه د تحول ساحه یو له بل سره پرتله کړئ او ووایاست چې د کوم یوه پراګندګي زیاته ده؟

د انحراف اوسط
(Average deviation)



که د یوه سیند د یوه ټکي ژوروالی 1.5 متره وي، فکر وکړئ چې د سیند د ټولو ټکو ژوروالی یو شان دی؟

فعالیت

پنځو تنو زده کوونکو په یوه صنفي آزموینه کې لاندې نمرې اخیستې دي.

12 14 16 18 20

- د دې نمرو اوسط او یا منځنۍ قیمت پیدا کړئ.
- د ټولو ډېټا وو د اوسط توپیر پیدا کړئ.
- د هرې ډېټا د اوسط د توپیر د جمع حاصل ولیکئ.
- د هرې ډېټا د اوسط د توپیر د مطلقه قیمتونو د جمع حاصل پیدا کړئ.
- په لاس راغلي قیمتونه سره پرتله کړئ.
- تاسې په خپله د 5 ډېټاګانو یو مثال ورکړئ او پورتنۍ عملیې پرې سر ته ورسوئ.

له پورتني فعالیت څخه پوهېږو هغه توپیر چې د ډېټا او اوسط تر منځ دی د منځنۍ یا اوسط انحراف په نامه یادیږي.

د data د منځنۍ یا اوسط انحراف مجموعه، همیشه صفر ده. په دې دلیل د data د څېړنې لپاره له انحراف د مطلقه قیمت څخه ګټه اخلو. که د ټولو انحرافونو مطلقه قیمت جمع کړو او د data په شمېر یې وویشو، د انحراف اوسط ورته ویل کیږي، د لاندې فورمول په مرسته حسابیږي:

$$\text{د انحراف اوسط یا منځنۍ} = \frac{|x_1-\bar{x}|+|x_2-\bar{x}|+\dots+|x_n-\bar{x}|}{n}$$

دلته $X_1, X_2 ... X_n$ عبارت له data او $\overline{X}$ د ډېټا یا اوسط او n د ډېټا شمېر دی، لیدل کېږي، چې هر څومره د اوسط انحراف لوی وي، نو په هم هغه اندازه د data د پراګندګي له اوسط نه ډېره ده.

مثال: د 40 تنو زده کوونکو نمرې په لاندې جدول کې ورکړل شوي دي.

کثرت	نمرې
2	0 – 10
7	10 – 20
4	20 – 30
5	30 – 40
10	40 – 50
12	50 – 60

د پورتنیو نمرو د انحراف اوسط پیدا کړئ؟

حل: لومړی د اوسط مقدار په لاس راوړو.

f= کثرت	د ډیټاګانو اوسط	f · x	$x - \overline{x}$	$f(x - \overline{x})$
2	5	10	5 – 37.5 = –32.5	2 × (–32.5) = –65
7	15	105	15 – 37.5 = –22.5	7 × (–22.5) = –157.5
4	25	100	25 – 37.5 = –12.5	4 × (–12.5) = –50
5	35	175	35 – 37.5 = –2.5	5 × (–2.5) = –12.5
10	45	450	45 – 37.5 = 7.5	10 × 7.5 = 75
12	55	660	55 – 37.5= 17.5	12 × 17.5 = 210
1 n = 40		1500		

$$\overline{x} = \frac{10+105+100+175+450+660}{40} = \frac{1500}{40} = 37.5$$

لیدل کېږي چې، د $f(x-\overline{x})$ د جمع حاصل له صفر سره مساوي دی، نو باید مطلقه قیمت یې سره جمع کړو.

$$\text{د انحراف اوسط} = \frac{|-65|+|-157.5|+|-50|+|-12.5|+|75|+|210|}{40}$$

$$\text{د انحراف اوسط} = \frac{65+157.5+50+12.5++75+210}{40} = \frac{570}{4} = 14.25$$

پوښتنې

د A او B دوو جمعیتونو انحرافونه په لاندې ډول راکړل شوي.

د A جمعیت انحرافونه: 4 2 0 0 -1 -2 -3

د B جمعیت انحرافونه: 8 1 0 0 -2 -3 -4

- د A جمعیت د انحراف اوسط پیدا کړئ.
- د کوم جمعیت پراکندګي زیاته ده؟

د اتم څپرکي لنډیز

• صنف د هغې ډېټا مجموعه ده چې ګډې ځانګړتیاوې ولري. د ډېټا د صنف بندی لپاره لاندې پړاوونه په پام کې نیسو:

- د تحول ساحه: د ډېټا د ډېرو لږو او ډېرو زیاتو مقدارونو تر منځ وسعت.
- د صنف پراخوالی: د تحول د ساحې او د صنفونو د شمېر نسبت.
- د صنفونو کثرت: د هغو ډېټاګانو د صنفونو شمېر چې په هر صنف کې شته.
- د صنف مرکز: د هر صنف د اوسط محاسبه.

• کــه پــه صنف بندۍ کې متحولونه نښــتې یا متصل وي، د راتلونکي صنف پورتنی ســرحد د مخکیني صنف د لاندېني ســرحد ســره برابر دی. په هغه حالت کې چې ډېټا د صنف د پورتنی سرحد سره برابر وي، هغه ډېټا په راتلونکي صنف پورې اړه لري.

د صنفونو د ډیټاګانو د شمېر مجموعه، د ټولې ډېټا له شمېر سره برابره ده.

• فرض کوو، د $X_1, X_2 \dots X_n$ ډیټاګانې په ترتیب سره د $W_1, W_2 \dots W_n$ ضریبونو لرونکې وي، دغه اطلاعات کولای شو په لاندې جدول کې خلاصه کړو.

data	X_1	X_2	...	X_n
د ضریب (وزن)	W_1	W_2	...	W_n

• په دې حالت کې د پورتنی ډېټا منځنۍ قیمت (اوسط) په لاندې ډول محاسبه کېږي:

$$\text{وزني اوسط} = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots\dots + w_n x_n}{w_1 + w_2 + \dots\dots + w_n}$$

• هستوګرام یا مستطیلي ګراف، عبارت له هغه ګراف څخه دی چې د کثرت توزیع یې د مستطیلونو په مرسته ښودل کېږي.

د مستطیل جګوالی، د صنف له کثرت سره برابر دی.

د هر مستطیل مساحت د صنفونو د پراخوالي او د صنف د کثرت له حاصل ضرب سره برابر دی.

په مستطیلي ګراف کې مستطیلونه له یو بل سره تړلي او د تړلیو(متصلو) متحولینو څخه د ګراف د ښودلو لپاره ګټه اخلي.

• په یوه اختیاري شعاع یوه دایره د مرکزي زاویې په مرسته په n برخو وېشو، داسې چې دهرې برخې د مرکزي زاویې اندازه، د کثرت له قیمت سره متناسبه وي، په دې حالت کې یې، مرکزي زاویه نظر لومړي صنف ته عبارت ده له:

$$\text{کثرت د درجې له مخې} = \frac{\text{د ډېټا کثرت}}{\text{د ټولو ډېټا شمېر}} \times 360^{\circ}$$

• د میانې د پیداکولو لپاره په لومړي پړاو کې ډېټا منظم کوو او وروسته:

- که د ډېټا شمېر طاق وي، د ډېټا میانه له منځنۍ ډېټا څخه عبارت ده.

- که د ډېټا شمېر جفت وي، میانه د دوو منځنیو ډېټاگانو اوسط دی.

• د تر ټولو کوچنۍ ډېټا او تر ټولو لویې ډېټا ترمنځ توپیر، د تحول له ساحې څخه عبارت ده، یا په بل عبارت، ډېټا په هغه ساحه کې بدلون کوي.

• د هرې ډېټا د اوسط تفاضل ته د منځني د اوسط انحراف وایي.

د انحراف اوسط د انحرافونو د مطلقه قیمت له اوسط څخه عبارت دی او فورمول یې د اړوندې ډېټا لپاره په لاندې ډول لیکو:

$$\text{د انحراف اوسط} = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \cdots + |x_n - \bar{x}|}{n}$$

د اتم څپرکي پوښتنې:

1- لاندې جدول ډک کړئ.

جمعي کثرت	د صنف مرکز	کثرتf	صنف
		12	7.5-10.5
		10	10.5-13.5
		15	13.5-16.5

- پورتنی جدول د کومې دسته بندې گراف راښيي. پيوسته يا نښتی يا مجزا؟

2- لاندې جدول د 100 شل کلنو ځوانانو د ونو اوږدوالی راښيي.

د صنف مرکز	کثرتf	صنف
153	15	149.5-156.5
160	20	156.5-163.5
167	30	163.5-170.5
174	25	170.5-177.5
181	10	177.5-184.5

- مستطيلي گراف يې رسم کړئ.

3-د A, B, C, D او E په ښارونو کې، 200 ميليونه افغانی سرمايه په کار اچول شوی ده، داسې چې:

- د A ښار لپاره 110 ميليونه افغانی
- د B ښار لپاره 32 ميليونه افغانی
- د C ښار لپاره 24 ميليونه افغانی
- د D ښار لپاره 14 ميليونه افغانی
- د E ښار لپاره 20 ميليونه افغانی.

ورکړل شوی معلومات په جدول کې پوره او دايروي گراف يې رسم کړئ.

ښارونه	د سرمايې ويش په ميليون	سرمايه په فيصدی	سرمايه په درجه
A	110		
B	32		
C	24		
D	14		
E	20		

4- يو شمېر کورنی د خپلو غړو له شمېر سره په لاندې جدول کې ورکړ شوې دي.

کورنی	18	12	15	8
د کورنی غړيf	2	4	5	8

● د کورنی موډ(Mode) پیدا کړئ. ● میانه یا منځنی پیدا کړئ.

● اوسط یې پیدا کړئ. ● د تحول ساحه یې محاسبه کړئ.

5- د یوه ټولګي د زده کوونکو د قدونو اندازه په لاندې جدول کې ورکړل شوې ده:

د قد اندازه	1.9-2	1.8-1.9	1.7-1.8	1.6-1.7	1.5-1.6
کثرت f	1	4	9	16	5

● د صنف موډ مشخص کړئ. ● د صنفونو مرکز حساب کړئ.

● اوسط یې پیدا کړئ.

6- یوه ښوونکي د یوې صنفي آزموینې د اوسط محاسبه داسې وکړه:

$$\text{د ازموینې اوسط} = \frac{1\cdot4+3\cdot6+2\cdot8+7\cdot9+3\cdot10+3\cdot11+5\cdot12+1\cdot15}{25}$$

● د ټولګي د زده کوونکو شمېر پیدا کړئ.

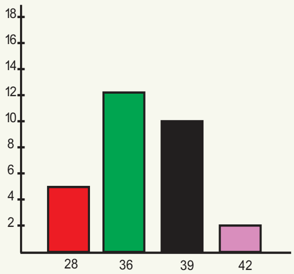
● څو نمرې د 8 او 13 تر منځ قرار لري؟ د (8 او 13 په ګډون)

● عمومي اوسط یې څو دی؟

7- لاندې میله یي ګراف د هغو کتابونو شمېر راښیي چې په یوه میاشت کې مطالعه شوی دی.

● احصائیوي جدول یې رسم کړئ.

● د مطالعه شویو کتابونو شمېر په میاشت کې څو دی؟



8- که د تحول ساحه له صفر سره برابره وي، له ډېټاګانو څخه څومره پایله اخلئ؟

9- که په ډېټاګانو باندې یو ثابت مقدار زیات کړو، د تحول ساحه څرنګه تحول کوي؟

10- د څلورو زده کوونکو د هغو ساعتونو شمېر چې لوبو ته یې ورکړي دي، په لاندې ډول راغلي دي: 9 7 5 1

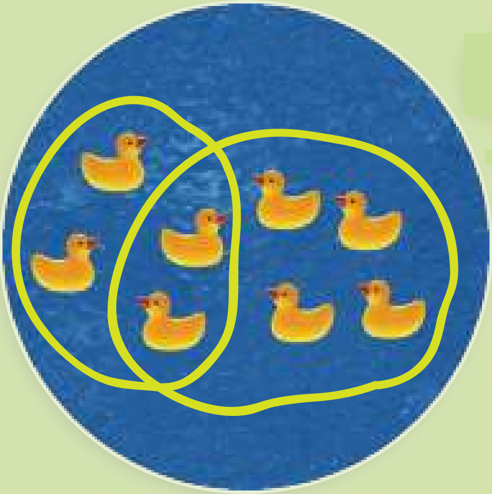
● د پورتنیو ډېټاګانو، د انحراف اوسط حساب کړئ.

نهـم څپرکی

احتمالات



د ناخاپو پېښو اتحاد



په دوارو شکلونو کې یو ځای څو هیلۍ وينئ. هیلۍ په کومه حلقه پورې اړه لري؟

فعاليت

- د یوې دانې رمل د اچولو په تجربه کې، د $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ نمونې فضا او د $A=\{1,2,3\}$ ، $B=\{4,5,6\}$ او $C=\{1,2\}$ ناخاپي پېښې په پام کې نیسو.
- د A او C ناخاپي پېښې یو له بل سره څه اړیکې لري؟
- که د A یا د B پېښې رامنځ ته شوې وي، آیا ویلای شئ چې د $A\cup B$ پېښه رامنځته شوې ده؟
- د A پېښه رامنځ ته شوې او بله کومه اختیاري پېښه چې هېڅ پېښه شوې نه ده نا ممکنه یا ϕ پېښه نومول کېږي.
- ویلای شئ، چې د $A\cup\phi$ او د A پېښې یو له بل سره څه توپیر لري؟

د پورتني فعالیت پایلې په عمومي ډول د S په نمونه يي فضاکې د A, B او C ناخاپي پېښو لپاره په لاندې ډول په لاس راوړو.

پایله:

- که چیرې د S په یو نمونه يي فضا کې $A\subseteq B$ یوه ناخاپي پیښه وي، په دې حالت کې:

$$A\cup B=B$$

- که چیرې د S په یوه نمونه يي فضا کې A او B ناخاپي پېښې وي، د $A\cup B$ او $B\cup A$ پېښې یو له بل سره توپیر نه لري؛ یعنې:

$$A\cup B=B\cup A$$

- که چیرې د S په یوه نمونه يي فضا کې د A یا B یوه پېښه رامنځ ته شي، نو د $A\cup B$

پيښنه هم رامنځ ته شوې ده او سربېره په دې

$$A \subseteq A \cup B \quad \text{او} \quad B \subseteq A \cup B$$

• د A پيښه د S په نمونه يي فضا کې پيښه شوې ده او يوه بله پيښه چې هېڅ نه پيښيږي، يعني ϕ، په دې معنا ده چې يوازې د A پيښه را منځ ته شوې ده.

$$A \cup \emptyset = A$$

• د $A \cup B$ ناخاپي پيښه په دې معنا ده چې لږ تر لږه د A يا B پيښه منځ ته راغلې ده.

مثال: که چېرې د C ناخاپي پيښه د A او B دوې بېلا بېلې ناخاپي پيښې په خپل ځان کې ولري، په دې حالت کې د $A \cup B$ ناخاپي پيښه هم په خپل ځان کې لري، په يوه مثال کې يې روښانه کړئ؟

حل: د $A=\{1,2\}$, $B=\{2,3\}$ او $C=\{1,2,34\}$ پيښې په پام کې نيسو ليدل کيږي چې $A \subseteq C$ او $B \subseteq C$ دي، نو:

$$B \cup A = A \cup B = \{1\ ,\ 2\ ,\ 3\} \Rightarrow A \cup B \subseteq C$$

پوښتنې

1- د S له يوې نمونه يي فضا څخه، د A, B او C د ناخاپي پيښو لپاره د يوه مثال (بېلګې) په مرسته يې د لاندې اړيکو سم والی وښيئ.

a) $A \cup \emptyset = A$

b) $A \cup A = A$

c) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

2- که $A \subseteq B$ وي په يوه مثال کې وښيئ چې $A \cup B = B$ دی.

3 - که چېرې د A او $A \cup B$ ناخاپي پيښې سره برابرې وي، په يوه ګراف کې يې وښاياست، چې د A ناخاپي پيښه د B ناخاپي پيښه په بر کې لري.

د ناڅاپي پېښو تقاطع



د نـور د اصلي رنګونو لـه تقاطع څخه کوم نور رنګونه لاسته راځي؟

فعالیت

- د رمل د یوې دانې د اچولو نمونه یي فضا $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ او د $A=\{2,4,6\}$، $B=\{4,6\}$ او $C=\{1,3,5\}$ ناڅاپي پېښې په پام کې نیسو.
- د $A\cap B$ او $B\cap A$ ناڅاپي پېښې، یوه له بلې سره څه اړیکه لري؟
- آیا د A او B پېښې د $A\cap B$ ناڅاپي پېښه په بر کې لرلی شي، که نه؟
- دارا وښیئ، چې د $C\cap B$ ناڅاپي پېښه یوه ناشوني پېښه ده.
- که د B پېښه د A پېښه په ځان کې ولري، د A او $A\cap B$ ناڅاپي پېښې سره پرتله کړئ.

له پورتني فعالیت څخه کولای شو لاندې پایلې په عمومي ډول بیان کړو:

پایله:

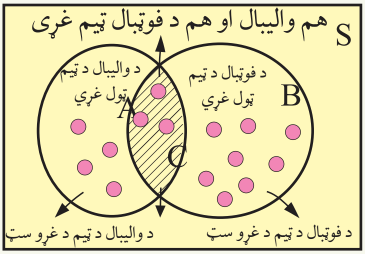
د S په یوه نمونه یي فضا کې د A, B او C ناڅاپي(تصادفي) پېښو لپاره لرو:

- د $A\cap B$ او $B\cap A$ ناڅاپي، پېښې یو شان دي.
- د A او B هره ناڅاپي پېښه هره یوه یې د $A\cap B$ ناڅاپي پېښه په خپل ځان کې لري.
- که د A او B د دوه پېښو لپاره $A\cap B=\phi$ وي، په دې حالت کې د A او B پېښې یوه له بله بېلې پېښې بلل کېږي.
- د A پېښې لپاره لرو:

$$A\cap S=A \text{ ، } A\cap\emptyset=\emptyset$$

- که چېرې د B پېښه د A پېښه په خپل ځان کې ولري، نو $A\cap B=A$ سره ده.

مثال: د یوه ښوونځي د فوټبال له ټیم څخه درې تنه د ښوونځي د والیبال د ټیم غړي هم دي. که چیرې د فوټبال د ټیم غړي په A د والیبال د ټیم غړي په B او د دواړو ټیمونو ګډ غړي په C سره وښیو، په دې حالت کې د ستونو تر منځ اړیکه د سټ د تیورۍ په بڼه ولیکئ:



$$A \cap B = C$$

آیا پوهېږئ چې د B د سټ په مکمله سټ کې یعني $\overline{B}$ کې د والیبال د ټیم ټول غړي ګډون لري، که نه؟ نو د $\overline{B}$ په سټ کې ټول هغه زده کوونکي ګډون لري چې د فوټبال د ټیم غړي نه دي. څرنګه چې 3 تنه زده کوونکي د والیبال د ټیم غړي چې په عین حال کې د فوټبال د ټیم غړي هم دي، په $\overline{B}$ کې ګډون نه لري، نو په دې اساس د والیبال ټیم د $\overline{B}$ سټ په پام کې نیولو سره نیمګړی دی.

پوښتنې

1- د A, B ناخاپي پېښه د دیاګرام په مرسته د A او B د بېلابېلو حالاتو لپاره چې د C پېښه د A او B پېښې په خپل ځان کې لري، وښیئ او وضاحت ورکړئ.

2- په یوه مثال کې د A, B او C پېښې چې A او B په خپل ځان کې لري، وښیئ چې:

$$a)\ \ \overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$b)\ \ \overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

3- لاندې پېښې په بیان سره ولیکئ:

$$a)\ \ \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$b)\ \ \overline{A \cap B}$$

$$c)\ \ \overline{A \cup B}$$

بشپړ ست



که چیرې، S د افغانستان ولایتونه A د شمال او B نورپاتې ولایتونه وي، نو $S-A$ او $S-B$ کوم ولایتونه رانښيي؟

فعالیت

- د رمل یوې دانې د اچولو نمونه يي فضا $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ او د $A=\{1,3,5\}$ ناخاپي پېښه په پام کې ونیسئ.
- د A د ناخاپي پېښې مکمله یعنې $\overline{A}$ کومه ناخاپي پېښه کېدلی شي؟
- یوه ناخاپي پېښه پیداکړئ چې A يې په بر کې ولري او په $\overline{A}$ کې شامله نه وي.
- آیا کولای شئ د S له نمونه يي فضا څخه یوه پېښه پیداکړئ چې په یوه وخت کې نه په A کې او نه په $\overline{A}$ کې ګډون ولري؟
- د A او $\overline{A}$ د ناخاپي پېښو اتحاد له حتمي پېښې سره څه اړیکه لري؟
- د A او $\overline{A}$ پېښو تقاطع، د ناشونې پېښې سره څه اړیکه لري؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

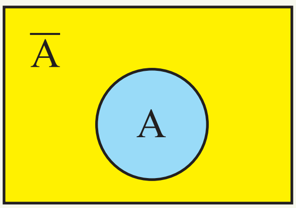
پایله: که چیرې S یوه نمونه يي فضا او A یوه ناخاپي پېښه وي:

- $\overline{A}$ یوه ناخاپي پېښه ده چې په یوه وخت د A سره نه پېښېږي.
- د A د هرې ناخاپي پېښې لپاره لرو چې:

a) $A\cup\overline{A}=S$

b) $P(A\cup\overline{A})=P(S)=1$

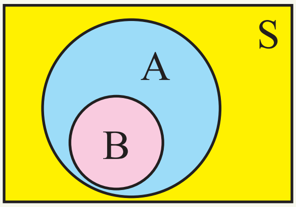
c) $P(\overline{A})=1-P(A)$

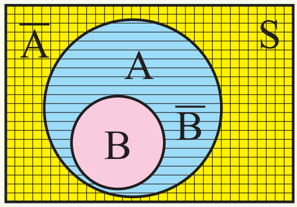


د S نمونه فضا

مثال: که د S په یوه نمونه یي فضا کې د A ناڅاپي پېښه د B ناڅاپي پېښه په خپل ځان کې ولري، په ګرافیکي ډول وښایاست، چې د $\overline{B}$ ناڅاپي پېښه د $\overline{A}$ ناڅاپي پېښه په خپل ځان کې لري؟

حل: څرنګه چې $B \subseteq A$ دی که چیرې موږ په شکل کې $\overline{A}$ او $\overline{B}$ وښیو، نو له لاندې رسم شوي شکل څخه په آسانۍ سره لیدل کېږي چې: $\overline{A} \not\subset \overline{B}$





$\overline{B}$ افقي کرښې $\overline{A}$ عمودي کرښې

پوښتنې

1- د یوه مثال او ګراف په مرسته د S د نمونه یي فضا او د A او B ناڅاپي پېښو لپاره وښیئ چې:

a) $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$

b) $\overline{S} = \emptyset$

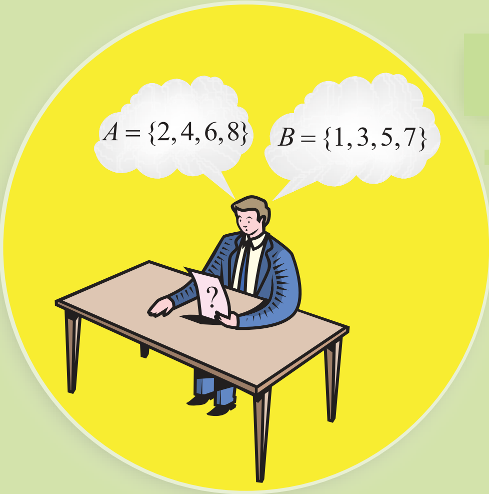
c) $S = \overline{\emptyset}$

2- د S نمونه یي فضا او د A او B ناڅاپي پېښو لپاره لاندې پېښې په عبارت سره ولیکئ.

a) $\overline{A} \cap \overline{B}$

b) $\overline{(A \cup B)}$

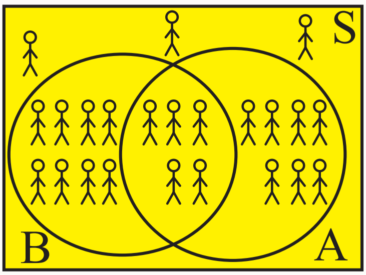
په ستونو مډل جوړول



تر اوســـه مو له الجبري یا هندسي قوانینو څخه د ژوندانه د مســـایلو په حل کې ګټه اخیســـتله. آیا فکر موکړی چې د ســـتونو څخه هم کولای شـــو چې د خپلو مسایلو د حل لپاره ګټه واخلو؟

فعالیت

د یوه ټولګي له 23 زده کوونکو څخه مو د خویندو او وروڼو لرونکو زده کوونکو احصائیه راټوله کړي ده چې په لاندې دیاګرام کې لیکل شوي ده.



په شکل کې ټول هغه زده کوونکي چې خویندی لري د A په سټ او هغه زده کوونکي چې وروڼه لري د B په سټ سره ښودل شوي دي.

شکل په پام کې ونیسئ، د لاندې فعالیت سوالونو ته ځواب پیدا کړئ:

- څو تنه خویندې لري؟
- څو تنه وروڼه لري؟
- څو تنه هم خویندې او هم وروڼه لري؟
- څو تنه، نه خویندې او نه وروڼه لري؟
- څرنګه کولای شو، دا مسأله د ریاضي په ژبه ولیکو؟
- ټول هغه کسان چې خویندې نه لري، څو تنه دي؟

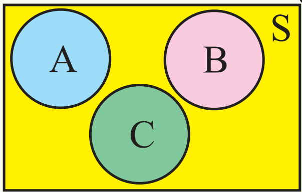
لیدل کېږي چې پورتنی ګراف کولای شي پورتنیو ټولو سوالونو او د هغوی په څېر نورو سوالونو ته په ښه توګه ځواب ورکړي.

نو له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راوړو:

پایله: لیدل کېږي چې دسټ د تیوري په کارولو سره، د ډېرو هغو مسایلو حل چې په ورځني ژوندکې ورسره مخامخ کېږو حل پیدا کړو او هغه و ارزوو.
د سټ د تیوري تطبیق په احتمالاتو کې او یا په بل عبارت، د هغو ناخاپي پېښو د پېښېدو د مسائلو حل او د سټ د تیورۍ په مرسته د هغې ښودنه، د سټ د تیورۍ یوه بله د اهمیت وړ د تطبیق ساحه شمېرل کیدای شي.

مثال: د S د نمونه یي فضا او د B, A او C ناخاپه پېښې په لاندې دیاګرام کې ورکړل شوي دي، په پام کې ونیسئ، د لاندې پېښو د پېښېدو احتمال مطلوب دی:

a. د دې احتمال شته چې د A یا B ناخاپي پېښه رامنځته شي.
b. د دې احتمال شته چې د A پېښه رامنځته شي.
c. د دې احتمال شته چې د C پېښه رامنځته شي.



حل:
a. د A یا B احتمال په حقیقت کې د $A \cup B$ احتمال دی، خرنګه چې دا پېښې یو له بل څخه بېلې یا مستقلې دي، یعنې $A \cap B = \phi$ دی، نو: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

b) د دې احتمال چې د A ناخاپي پېښه رامنځته شي،په دې معنا چې د $\overline{A}$ پېښه نه ده پېښه شوې، په بل عبارت، هغه پېښه ده چې د C یا B حادثه پېښه نه شي، نو:
$P(A) = 1 - P(\overline{A})$ خرنګه چې $P(\overline{A}) = P(C \cup B)$ دی، نو
$P(A) = 1 - (P(C \cup B)) = 1 - P(C) - P(B)$

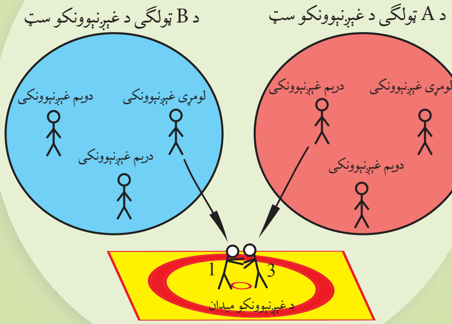
c) د دې احتمال شته چې د C ناخاپي پېښه رامنځته نه شي د هغې پېښې د پېښېدو له احتمال سره برابر دی چې د A یا B پېښې، پېښې شي او دا د $A \cup B$ دپېښې د پېښېدو څخه عبارت ده.

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

پوښتنې

1- هغه مثال چې په فعالیت کې مو ترې ګټه اخیستې ده په پام کې ونیسئ:
a) د دې احتمال مطلوب دی چې له دې ټولګې څخه یو زده کوونکی په تصادفي یا ناخاپي ډول وټاکل شي چې خور او ورو ونه لري.
b) د یوه داسې زده کوونکي د ټاکلو احتمال شته چې په ناخاپي ډول ټاکل کېږي، پیدا کړئ چې لږ تر لږه خور یا ورور ولري.

د شمېرلو اصل



د A او B دوو ټولگیو څخه درې تنه د غېږې نیولو لپاره ټاکل شوي دي، د A او B د ټیمونو غړي، په څو ډوله کولای شي، چې یو له بل سره په غېږه ورشي؟

فعالیت

دوه عدده، تور او سرمه یي رنگه پتلونونه له درې عدده سپین، آبي او پولادي رنگه کمیسونو سره په پام کې نیسو.

- په څو ډوله کولای شوو هغه واغوندو؟
- د شمېرنې د ترتیب لپاره له ونه ییز گراف څخه گټه واخلئ.
- د اغوستلو د ټولو امکاناتو او د پتلونونو او کمیسونو د شمېر تر منځ څه ډول اړیکه شته ده؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راوړو.

پایله:

1- د دوو سټونو د عناصرو په ترکیب کې د ټولو امکاناتو شمېر د هر سټ د عناصرو د شمېر د ضرب له حاصل سره مساوي دی.

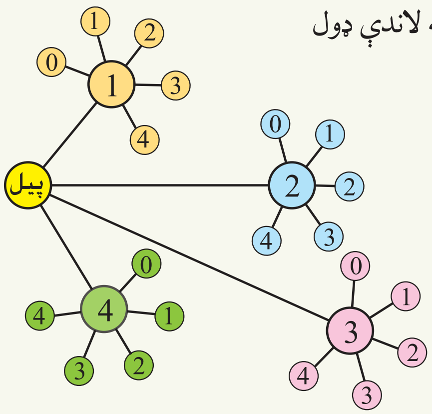
2- که چیرې د امکاناتو شمېر او یا د یوه سټ عناصر په m او د یو بل سټ د عناصرو شمېر مساوي په n وي، په دې حالت کې یو له بل سره په دواړه ټاکنې $(m\times n)$ ډوله امکان لري.

مثال: د 0، 1، 2، 3 او 4 رقمونو څخه په گټې اخیستنې سره څو دوه رقمي عددونه جوړولای شو؟ ونه ییز گراف یې رسم کړئ او هغه احتمال پیدا کړئ چې له دې عددونو څخه یو عدد په ناڅاپي ډول و ټاکل شي چې هغه عدد په 2 د وېش وړ وي.

د دې کار لپاره د ذکر شوي دوه رقمي عدد د جوړولو لپاره دوه تش ځایونه د هر رقم لپاره په پام کې نیسو.

له کینۍ خوا په په تش ځای کې د راکړل شویو پنځو رقمونو څخه 4 امکانه (پرته له صفر) د 3,2,1,0 او 4 عددونو د ځای پر ځای کولو لپاره شته دي، خو د ښۍ خوا د تش ځای لپاره 3,2,1,0 او 4 هرو پنځو عددونو څخه ګټه اخلو. په دې ترتیب د دې رقم د ټاکلو پنځه امکانه شته دي چې په مجموعي ډول د پورتنیو عددونو په وسیله د دوه رقمي عدد د جوړولو لپاره $4\times5=20$ امکانه شته دي.

دا مطلب کولای شو د ونه ییز ګراف په مرسته په لاندې ډول وښیو، لکه:



د دې لپاره چې نوموړی، رقم پر 2 د وېش وړ وي د ښۍ خوا په تش ځای کې د 5 برابرو امکاناتو څخه یوازې 3 امکانه د (2,0 او 4) شته دی. د داسې عددونو د جوړولو لپاره چې پر 2 د وېش وړ وي، د $4\times3=12$ برابر حالتونه دي چې په دې حالت کې د هغه رقم د ټاکل کیدو احتمال چې پر 2 د وېش وړ وي عبارت دی له:

$$P(\text{په 2 د وېش وړ عدد})=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}=0.6=60\%$$ دهغه عدد احتمال چې په 2 د وېش وړ وي.

پوښتنې

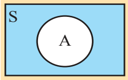
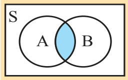
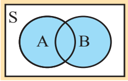
1- د (م، ر، ی،م) تورو څخه په ګټې اخیستنې سره څو څلور حرفي معنا لرونکي او معنا نه لرونکي کلمې جوړولای شو؟ موضوع د ونه ییز ګراف په مرسته تشریح کړئ؟

که چېرې له دې ترکیبي کلمو څخه په ناڅاپي ډول یوه کلمه وټاکو د دې احتمال پیدا کړئ چې دا کلمه((مریم)) وي.

2- د 8,7,4,1,0 او 9 عددونو څخه د مبایل تلیفون څو داسې شپږ رقمي نمرې جوړولای شو چې له کینې خوا څخه، په 077 پیل شوي وي؟

د نهم څپرکي لنډيز:

- د دې لپاره چې وکولای شو د ناشاپي پېښو د ترکيب د بېلا بېلو حالتونو د پرتله کولو لپاره د ستونو د تيوري په کارولو سره يو ښه تصور ولرو، هغه مو په لاندې جدول کې راټول کړل.

د پېښې احتمال	د Venn دیاگرام او ناڅاپي پېښه	د بيان ښودنه د سټ په واسطه	د ناڅاپي پېښې بيان
ځرنګه چې $P(S)=1$ دی نو $P(A)=1-P(\overline{A})$		$\overline{A}=S-A$ يا $S=A\cup\overline{A}$	د S هغه ټولې ناڅاپي پېښې چې د A پېښه په کې ګډون و نه لري د A پېښې عکس دی.
$P(A\cap B)$		$A\cap B$	د A ناڅاپه پېښه او د B ناڅاپه پېښه پېښېږي.
$P(A\cup B)$ $=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$		$A\cup B$	لږ تر لږه د A يا د B د ناڅاپي پېښو څخه يوه پېښېږي.

د شمېرنې حل: د دوو سټونو د عناصرو په ترکيب کې د ټولو امکاناتو شمېر، د هرې ترکيبي مجموعې، د عناصرو د ضرب له حاصل سره مساوي دی.

که د سټ د عنصرونو امکان په m ډول او د بل سټ د عنصرونو امکان په n ډول، وي يو له بل سره د دوی د ترکيب د ټولو امکاناتو شمېر، د $m\times n$ سره برابر دی.

د نهم څپرکي پوښتنې

1- که S يوه نمونه يي فضا او A د هغې يوه ناڅاپه پېښه وي وښاياست چې:

a) که $A\subseteq\phi$ وي وښيئ چې $P(A)=0$ دی.

b) که $S\subseteq A$ وي په دې حالت کې $P(A)=1$ دی.

2- که چېرې د C ناڅاپي پېښه، د A او B ناڅاپي پېښې په ځان کې ولري، وښيئ چې همدارنګه، د C ناڅاپي پېښه د $A\cup B$ په ځان کې ولري.

3- که چېرې د S د A او B يوه نمونه يي فضا وي، د B او $A\cup B$ ناڅاپي پېښې يو بل په بر کې ولري، وښيئ چې د $A\cup B$ او د B احتمال يو د بل سره برابر دي.

4- که د S په يوه نمونه يي فضا کې د B ناڅاپه پېښه د A پېښه په بر کې ولري، وښيئ چې د A او $A\cup B$ ناڅاپه پېښې يو بل په ځان کې لري. سربېره پر دې واضح کړئ چې د دې ناڅاپي پېښو احتمال يو له بل سره څه اړيکه لري؟

5- که چېرې S يوه نمونه يي فضا وي او B د هغې يوه ناڅاپه پېښه وي، وښيئ چې: $S-B=\overline{B}$.

6- د ګراف په مرسته وښيئ چې Sد يوې نمونه يي فضا د A او B دوو ناڅاپي پېښو لپاره $B-A$ او $\overline{A}-\overline{B}$ سره مساوي دي، يعنې: $\overline{A}-\overline{B}=B-A$.

7- وښيئ چې، د $\overline{A}\cap\left[(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})\right]$ ناڅاپي پېښ، احتمال له صفر سره مساوي دی.